第一部分　初等数学

第一章　初中数学

一、绝对值

1. 绝对值的性质

$|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -a, & a<0;\end{cases}$ 或 $|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0;\end{cases}$ 或 $|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\ -a, & a\leqslant 0.\end{cases}$

2. 绝对值不等式(a、b、c 均为任意实数)

① $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;

② $|a|\leqslant b \Leftrightarrow -b\leqslant a\leqslant b$;

③ $|a|-|b|\leqslant |a-b|$;

④ $|a|-|b|\leqslant |a+b|$;

⑤ $||a|-|b||\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|$;

⑥ $|a-c|\leqslant |a-b|+|b-c|$.

二、乘法公式与因式分解

(1)(平方差公式)$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

(2)(完全平方公式)$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

(3)(立方差)$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;

(4)(立方和)$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

(5)(完全立方公式)$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

三、分式的基本性质与运算法则

1.分式的基本性质

分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变,即$\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}$,$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$,其中 m 是不等于零的整式.

2.分式的乘法法则

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\quad(b、d\neq0)$;

3.分式的除法法则

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\quad(b、c、d\neq0)$;

4.分式的乘方法则

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(b\neq0,n$ 为正整数);

5.同分母分式加减法则

$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}\quad(c\neq0)$;

6.异分母分式加减法则

$\frac{a}{c}\pm\frac{d}{b}=\frac{ab\pm cd}{bc}\quad(b、c\neq0)$.

四、二次根式与三次根式的计算

(1)$(\sqrt{a})^2=a\quad(a\geqslant0)$;

(2) $\sqrt{a^2}=|a|$;

(3) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$;

(4) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}\quad(a>0,b\geqslant 0)$;

(5) $(\sqrt[3]{a})^3=\sqrt[3]{a^3}=a$.

五、一次函数及二元一次方程组

1. 一次函数的性质

若直线 $y=k_1x+b_1$ 与直线 $y=k_2x+b_2$ 垂直,则 $k_1\cdot k_2=-1$.

2. 二元一次方程组

对于二元一次方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$

(1) 当 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}(a_2,b_2\neq 0)$ 时,方程组有唯一解;

(2) 当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}(a_2,b_2,c_2\neq 0)$ 时,方程组有无数组解;

(3) 当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}(a_2,b_2,c_2\neq 0)$ 时,方程组无解.

六、一元二次方程及二次函数

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

(1) 求根公式是 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,其中 $\Delta=b^2-4ac$ 叫做根的判别式.

① 当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根;

② 当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根;

③ 当 $\Delta<0$ 时,方程没有实数根.

(2) 若方程有两个实数根 x_1 和 x_2,则二次三项式 ax^2+bx+c 可分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$.

(3) 当 $a=1$ 时，以 m 和 n 为根的一元二次方程是 $x^2-(m+n)x+mn=0$.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的性质

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图形叫做抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

(1) 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 y 轴的交点

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴的交点为$(0,c)$.

(2) 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 x 轴的交点

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图形与 x 轴的两个交点的横坐标 x_1 和 x_2，是对应一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根. 记 $\Delta=b^2-4ac$，当 $\Delta>0$ 时，抛物线与 x 轴有两个不同的交点，当 $\Delta=0$ 时，抛物线与 x 轴仅有一个交点，这个交点即为抛物线的顶点；当 $\Delta<0$ 时，抛物线与 x 轴没有交点.

(3) 二次函数的性质

函数解析式	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y=ax^2$	当 $a>0$ 时开口向上；当 $a<0$ 时开口向下	$x=0$(y 轴)	$(0,0)$
$y=ax^2+k$		$x=0$(y 轴)	$(0,k)$
$y=a(x-h)^2$		$x=h$	$(h,0)$
$y=a(x-h)^2+k$		$x=h$	(h,k)
$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$		$x=-\dfrac{b}{2a}$	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

七、统计初步计算

1. 平均数

设有 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，那么平均数为：

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n};$$

2. 加权平均数

如果在 n 个数中，x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_k 出现 f_k 次，并且 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$，则 $\overline{x}=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$，这时 $\overline{x}$ 叫做加权平均数，其中 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 叫做权.

八、锐角三角函数

1. 设 $\angle A$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的任一锐角，则 $\angle A$ 的正弦：$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$，$\angle A$ 的余弦：$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$，$\angle A$ 的正切：$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$，并且 $\sin^2A+\cos^2A=1$.

2. 当 $0^\circ<\angle A<90^\circ$ 时，$0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$，$\tan A>0$. $\angle A$ 越大，$\angle A$ 的正弦和正切值越大，余弦值反而越小.

3. 余角公式：$\sin(90^\circ-A)=\cos A$，$\cos(90^\circ-A)=\sin A$.

4. 特殊角的三角函数值：$\sin30^\circ=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\sin45^\circ=\cos45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin60^\circ=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan45^\circ=1$，$\tan60^\circ=\sqrt{3}$.

九、常用的面积与体积公式

(1) $S_{\text{三角形}}=\dfrac{1}{2}ah$，

$S_{\text{正三角形}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times a^2$；

(2) $S_{\text{平行四边形}}=ah$，

$S_{\text{菱形}}=ah=\dfrac{1}{2}mn$，

$V_{\text{正方体}}=a^3$，

$V_{\text{长方体}}=abh$；

(3) $S_{\text{梯形}}=\dfrac{1}{2}(a_1+a_2)h$；

(4) $L_{\text{圆周长}}=2\pi r$,

$S_{\text{圆}}=\pi r^2$,

$S_{\text{球表面积}}=4\pi r^2$,

$V_{\text{球}}=\frac{4}{3}\pi r^3$;

(5) $l_{\text{扇形弧长}}=\frac{n\pi r}{180}=r\theta$,

$S_{\text{扇形}}=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}rl_{\text{扇形弧长}}$;

(6) $S_{\text{圆柱侧面积}}=2\pi rh$,

$S_{\text{圆柱全面积}}=2\pi rh+2\pi r^2$,

$V_{\text{圆柱}}=\pi r^2h$;

(7) $S_{\text{圆锥侧面积}}=\pi rl$,

$S_{\text{圆锥全面积}}=\pi rl+\pi r^2$,

$V_{\text{圆锥}}=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

注:公式中 a 表示底/边长,b 表示宽,h 表示高,m、n 表示对角线,a_1、a_2 分别表示上底、下底,r 表示半径,θ 表示圆心角(以弧度计),l 表示圆锥的母线长.

第二章　高中数学

一、集合运算的相关结论

(1)$A \cap B = \{x \mid x \in A,且\ x \in B\}$；

(2)$A \cup B = \{x \mid x \in A,或\ x \in B\}$；

(3)$A \cap A = A$；　　(4)$A \cap \varnothing = \varnothing$；

(5)$A \cap U = A$；　　(6)$A \cup A = A$；

(7)$A \cup \varnothing = A$；　　(8)$A \cup U = U$；

(9)$A \cap C_U A = \varnothing$；　　(10)$A \cup C_U A = U$；

(11)$C_U(C_U A) = A$；　　(12)$C_U(A \cap B) = (C_U A) \cup (C_U B)$；

(13)$C_U(A \cup B) = (C_U A) \cap (C_U B)$；

(14)$(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B, A \cap B = B \cap A$,

$A \subseteq (A \cup B), B \subseteq (A \cup B), A \cup B = B \cup A$；

(15)$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$；

(16)$A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

二、基本初等函数的性质

1. 指数运算法则

(1)$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, a^r \div a^s = a^{r-s}, (a^r)^s = a^{rs}, (ab)^r = a^r b^r (a > 0, b > 0, r, s \in \mathbf{Q})$.

(2) 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

(3) 规定：$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, 且\ n > 1)$；

$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, 且\ n > 1)$；

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$.

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (a > 0, b > 0)$.

2. 对数函数

(1) 对数恒等式

$a^{\log_a N} = N, \log_a a = 1, \log_a 1 = 0 (N > 0, a > 0$, 且 $a \neq 1)$.

(2) 对数运算法则

设 $a > 0$, 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0$, 则

$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$,

$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$,

$\log_a N^n = n\log_a N$.

(3) 对数换底公式

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0$ 且 $a \neq 1; c > 0$ 且 $c \neq 1; b > 0)$.

3. 三角函数

(1) 同角三角函数的基本关系式

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(2) 正弦、余弦的诱导公式

公式	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi + \alpha$ $(k \in \mathbf{Z})$	$\pi + \alpha$	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
正弦	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
余弦	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
口诀	奇变偶不变,符号看象限					

注:“奇”“偶”指的是 $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha$ 中的整数 k 是奇数还是偶数.“变”与“不变”是指函数的名称的变化.

(3) 两角和与差的公式

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$.

(4) 二倍角公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

公式变形:

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha, \cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$;

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha, \sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

(5) 辅助角公式

$y = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$,其中 $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$.

(6) 积化和差公式

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$;

$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$;

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$;

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$.

(7) 和差化积公式

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

(8) 三角函数的周期

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,及函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$,$x\in\mathbf{R}$($A$,$\omega$,$\varphi$ 为常数,且 $A\neq0$,$\omega>0$)的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$;函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$($A$,$\omega$,$\varphi$ 为常数,且 $A\neq0$,$\omega>0$)的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$.

(9) 面积定理

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$,其中 A、B、C 为 $\triangle ABC$ 的三个顶角,a,b,c 分别为 $\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 对应边的边长.

三、线、面的判定定理

1. 线与线平行的判定定理

平行于同一直线的两条直线平行.

2. 线与线垂直的判定定理

若一条直线垂直于一个平面,那么这条直线垂直于该平面内所有直线.

3. 线与面平行的判定定理

平面外一条直线和该平面内一条直线平行,则该直线与此平面平行.

4. 线与面垂直的判定定理

一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直,则该直线与此平面垂直.

5.面与面平行的判定定理

一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

6.面与面垂直的判定定理

一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直.

四、数列

1.数列的通项公式与前n项和的关系

$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$其中数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

2.等差数列

通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$($n\in\mathbf{N}^*$，d为数列的公差).

前n项和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{1}{2}d\right)n$.

3.等比数列

通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{a_1}{q}\cdot q^n$($n\in\mathbf{N}^*$，$q$为数列的公比).

前n项和公式：

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1,\\ na_1, & q=1\end{cases}\text{或 } S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1,\\ na_1, & q=1.\end{cases}$$

4.常见数列的前n项和

①$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

②$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$；

③$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

五、不等式

1. 不等式的基本性质

(1)(对称性)如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $b<a$,那么 $a>b$.

(2) 如果 $a>b$,且 $b>c$,那么 $a>c$,即 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

(3) 如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$,即 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

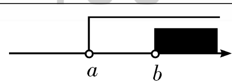
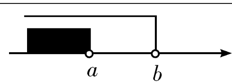
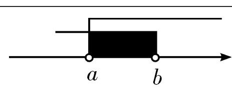
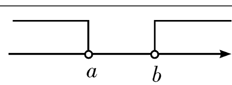
推论:如果 $a>b$,且 $c>d$,那么 $a+c>b+d$,即 $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(4) 如果 $a>b$,且 $c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b$,且 $c<0$,那么 $ac<bc$.

(5) 如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n(n\in\mathbf{N}$,且 $n>1)$.

(6) 如果 $a>b>0$,那么$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}$,且 $n>1)$.

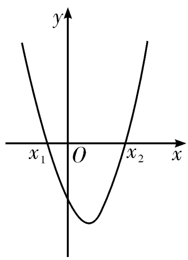
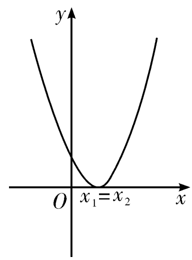
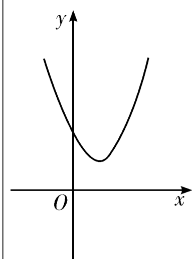
2. 一元一次不等式组的解集

不等式组 $(a<b)$	数轴表示	解集	口诀
$\begin{cases}x>a,\\x>b\end{cases}$		$x>b$	同大取大
$\begin{cases}x<a,\\x<b\end{cases}$		$x<a$	同小取小
$\begin{cases}x>a,\\x<b\end{cases}$		$a<x<b$	大小小大 中间找
$\begin{cases}x<a,\\x>b\end{cases}$		无解	小小大大 找不到

3. 一元二次不等式

我们知道,对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$,设 $\Delta=b^2-4ac$,它的解按照 $\Delta>0,\Delta=0,\Delta<0$ 可分为三种情况. 相应地,二

次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图形与 x 轴的位置关系也分为三种情况.因此,我们可分三种情况来讨论对应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 和 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集.

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图形			
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两个不同实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

4.基本不等式

(1)如果 $a,b\in\mathbf{R}$,那么

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

(2)(基本不等式)如果 $a,b>0$,那么

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

如果 a,b 都是正数,我们就称 $\dfrac{a+b}{2}$ 为 a,b 的算术平均,$\sqrt{ab}$ 为 a,b 的几何平均,于是,基本不等式可以表述为:

两个正数的算术平均不小于(即大于或等于)它们的几何平均.

事实上,基本不等式可以推广到一般的情形:对于 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,它们的算术平均不小于它们的几何平均,即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时,等号成立.

六、充分条件与必要条件

(1) 如果 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件,同时 q 是 p 的必要条件;

(2) 如果 $p\Rightarrow q$,但 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件;

(3) 如果 $p\Rightarrow q$,且 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的充分必要条件;

(4) 如果 $q\Rightarrow p$,但 $p\nRightarrow q$,则 p 是 q 的必要不充分条件.

第二部分　高等数学

第一章　函数、极限和连续

一、函数

1. 函数的概念

函数的两个基本要素：定义域，对应法则. 当两个函数的定义域和对应法则都相同时，两函数相同.

2. 函数的性质

(1) 单调性：设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义，如果对于该区间内任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$($f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $y = f(x)$ 在该区间内单调增加(减少).

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数.

(2) 奇偶性：设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$，则有 $-x \in D$)，对于 D 内任意一点 x，

如果恒有 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为 D 内的偶函数；

如果恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为 D 内的奇函数.

(3) 周期性：在函数 $f(x)$ 的定义域内，若存在一个正数 T，对于任一 x 有 $x \pm T$ 也在定义域内，且恒有 $f(x+T) = f(x)$，则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期，通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

(4) 有界性：设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义. 若存在 $M > 0$，

对于该区间内任意的x,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在该区间内为有界函数.

3.反函数

设有函数$y=f(x)$,其定义域为D,值域为M.如果对于M中的每一个y值,都可以由关系式$y=f(x)$确定唯一的x值($x\in D$)与之对应,这样就确定了一个以y为自变量的新函数,记为$x=f^{-1}(y)$,称为函数$y=f(x)$的反函数,它的定义域为M,值域为D.

求反函数的一般步骤:

(1) 在$y=f(x)$中将y作为因变量,解得$x=f^{-1}(y)$;

(2) 在$x=f^{-1}(y)$中交换x,y的位置,可得函数$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$,原函数的值域即为反函数的定义域.

4.基本初等函数及其性质

(1) 幂函数

$y=x^{\mu}$(μ为实数):定义域随μ而定,但在$(0,+\infty)$内总有定义,且$\mu>0$时,在第一象限内函数单调递增;$\mu<0$时,在第一象限内函数单调递减.

(2) 指数函数

$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$:定义域为$\mathbf{R}$,$a>1$时,函数单调递增;$0<a<1$时,函数单调递减.

(3) 对数函数

$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$:定义域为$(0,+\infty)$,$a>1$时,函数单调递增;$0<a<1$时,函数单调递减.

(4) 三角函数

$y=\sin x$:定义域为$\mathbf{R}$,周期$T=2\pi$,$|y|\leqslant 1$有界,奇函数;

$y=\cos x$:定义域为$\mathbf{R}$,周期$T=2\pi$,$|y|\leqslant 1$有界,偶函数;

$y=\tan x$:定义域为$\{x\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,周期$T=\pi$,奇函数;

$y=\cot x$：定义域为$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$，周期 $T=\pi$，奇函数.

(5) 反三角函数

$y=\arcsin x$：定义域为$[-1,1]$，$|y| \leqslant \frac{\pi}{2}$有界，奇函数，单调递增；

$y=\arccos x$：定义域为$[-1,1]$，$0 \leqslant y \leqslant \pi$有界，非奇非偶函数，单调递减；

$y=\arctan x$：定义域为 $\mathbf{R}$，$|y| < \frac{\pi}{2}$有界，奇函数，单调递增；

$y=\operatorname{arccot} x$：定义域为 $\mathbf{R}$，$0 < y < \pi$有界，非奇非偶函数，单调递减.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g \subset D_f$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)], x \in D_g$$

称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

二、极限

1. 数列极限

(1) 数列极限的定义

设$\{a_n\}$为数列，a 为常数. 若对任意的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当$n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$收敛于 a，常数 a 称为数列$\{a_n\}$的极限，并记作

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \text{ 或者 } a_n \to a(n \to \infty),$$

上式可读作“当 n 趋近于无穷大时，a_n 的极限等于a 或 a_n 趋于 a”.

注：① 若$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，则对于数列$\{x_n\}$的任意子数列$\{x_{n_k}\}$都有

$\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$；

② 若数列$\{x_n\}$有一个子数列极限不存在，或有两个子数列极限存在但不相等，则$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$不存在.

(2) 数列极限的性质

①(唯一性) 收敛数列的极限必唯一.

②(有界性) 收敛数列必有界.

③(单调有界性) 单调有界的数列必有极限.

④(夹逼定理) 对于三个数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$，从某项开始，存在正整数 N，当$n > N$时，有$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$，则$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$.

⑤(四则运算法则) 设$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = B$，则

$\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha x_n \pm \beta y_n) = \alpha A \pm \beta B \quad (\alpha, \beta \text{为常数})$；

$\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = AB$；

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

2. 函数极限

(1) 函数极限的定义

① 当$x \to x_0$时，函数$f(x)$的极限

设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义，如果当$x \to x_0$时，函数$f(x)$无限趋近于某一确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \to A (x \to x_0).$$

② 当$x \to \infty$时，函数$f(x)$的极限

如果当$x \to \infty$时，函数$f(x)$无限趋近于某一个确定的常数A，则称常数A为函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \to A(x \to \infty).$$

(2) 左极限、右极限

① 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一个左侧邻域 $(x_0-\delta, x_0)(\delta>0)$ 有定义，当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0（记作 $x\to x_0^-$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \text{ 或者 } f(x_0^-) = A.$$

② 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一个右侧邻域 $(x_0, x_0+\delta)(\delta>0)$ 有定义，当 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0（记作 $x\to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \text{ 或者 } f(x_0^+) = A.$$

③ 函数在一点处极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

(3) 函数极限的性质

①（唯一性）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，并有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$，则 $A=B$，即极限唯一.

②（局部有界性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

③（局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

④（夹逼定理）如果对于 x_0 的某一去心邻域内的一切 x，都有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A, \lim_{x\to x_0} h(x) = A,$$

则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

$x \to \infty$ 时上述结论也成立.

⑤(四则运算法则) 已知 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,则

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$;

当 $B \neq 0$ 时,有 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$;

$x \to \infty$ 时上述结论也成立.

⑥ 若 $f(x)$ 在点 $x = B$ 处连续,且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f(B).$$

(4) 抓大头求极限

一般地,设 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, m、n 为正整数,则

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m = n \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } m > n \text{ 时}, \\ \infty, & \text{当 } m < n \text{ 时}. \end{cases}$$

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小与无穷大的定义

① 如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零,则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小量,简称无穷小.

② 如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时,函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大,则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大量,简称无穷大,记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$.

(2) 无穷小量与无穷大量的关系

在同一极限过程中,

① 若函数 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大；

② 若函数 $f(x)$ 为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

(3) 无穷小量的性质

① 有限个无穷小的代数和或乘积仍是无穷小；

② 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小；

③ 常数与无穷小的乘积是无穷小.

(4) 无穷小量的比较

设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是在同一个自变量的变化过程中的两个无穷小，其中 $\alpha(x) \neq 0$，对于在该变化过程中的极限$\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 有如下几种情况：

① 若$\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$，则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小，记作$\beta(x) = o(\alpha(x))$；

② 若$\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$，则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小；

③ 若$\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C$(常数 $C \neq 0$)，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小；

特别地，若$\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 为等价无穷小，记作 $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

④ $\lim \dfrac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = a$，其中 $a \neq 0$，$n > 0$，a 为常数，n 为正整数，则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 n 阶无穷小.

(5) 常见的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x) \sim x$，

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

注:使用等价无穷小进行局部替换求极限时必须在乘积的形式下进行.

(6) 等价无穷小的重要性质

① 在同一极限过程中,若 $\alpha(x) \sim \alpha^*(x)$,$\beta(x) \sim \beta^*(x)$,且 $\lim \dfrac{\beta^*(x)}{\alpha^*(x)}$,$\lim \alpha^*(x)\beta^*(x)$ 存在,则

$$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\beta^*(x)}{\alpha^*(x)},\lim \alpha(x)\beta(x) = \lim \alpha^*(x)\beta^*(x);$$

② 在同一极限过程中,若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,$\beta(x) \sim \gamma(x)$,则 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$. 这个性质称为等价无穷小的传递性.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1\left(\lim\limits_{\square \to 0} \dfrac{\sin \square}{\square} = 1\right)$;

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\left(\lim\limits_{\square \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{\square}\right)^{\square} = \mathrm{e}\right.$ 或 $\left.\lim\limits_{\square \to 0}(1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = \mathrm{e}\right)$.

注:以下三个极限可以当做结论使用.

① $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$; ② $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (常数 $a > 0$);

③ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k \mathrm{e}^{-\delta x} = 0$ (常数 $\delta > 0, k > 0$).

三、函数的连续性

1. 函数在一点处连续

(1) 函数在一点处连续的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续,x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续要满足三个条件:

① 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处及其邻域内有定义;

② 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在;

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) 左连续与右连续

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续；

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

(3) 函数在一点处连续的充要条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

2. 函数的间断点

(1) 间断点的概念

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义时，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足下列三种情况之一，则点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点：

① 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处没有定义.

② $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

③ $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

(2) 间断点的分类

① 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，但不等于该点处的函数值，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$；或者极限存在，但 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，则称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点；

② 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限存在但不相等，则称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

可去间断点和跳跃间断点统称第一类间断点.

③ 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限中至少有一个不存在，则称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

左、右极限中至少有一个是无穷时，称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点.

当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 在某个区间内无限次振荡，不能趋于某一定值，称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的振荡间断点.

3. 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内是连续的.

初等函数在其定义区间内是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值最小值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上必定能取得最大值和最小值.

(2) 有界性定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上必有界.

(3) 零点定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b) < 0$），则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = 0$.

(4) 介值定理及其推论

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且在这个区间的端点取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$，则对于 A 和 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi) = C \quad (a < \xi < b).$$

推论：设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，M 和 m 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值和最小值，则对于满足 $m < \mu < M$ 的任何实数 μ，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \mu$.

第二章　一元函数微分学

一、导数的概念

1. 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，在点 x_0 处给自变量 x 一个改变量 $\Delta x\neq 0$（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内），相应地函数 y 有改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，或函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的变化率，可以记作 $y'\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$。

如果极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

关于导数的定义，关键是理解并牢记导数值的三种等价表达式的结构：

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$；

(3) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

2. 导数的几何意义

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

若 $f'(x_0)=0$,则曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为 $y=f(x_0)$,法线方程为 $x=x_0$.

若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$,即 $f'(x_0)$ 不存在,则曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程是 $x=x_0$,法线方程为 $y=f(x_0)$.

3. 可导与连续的关系及可导的充要条件

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 反之不成立.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等.

二、函数的微分

1. 微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在该区间内,若函数的改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数,$o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微,其中 $A\cdot\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分,记为

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0},即\ \mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

2. 可导与可微的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导等价于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可

微，且 $\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$.

三、导数与微分的性质和运算

1. 基本初等函数的导数与微分公式

(1) 导数的基本公式

①$C'=0$ (C 为常数)；

②$(x^n)'=nx^{n-1}$ (n 为实数)；

③$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ ($a>0, a\neq 1$)；

④$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

⑤$(a^x)'=a^x\ln a$ ($a>0, a\neq 1$)；

⑥$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

⑦$(\sin x)'=\cos x$；

⑧$(\cos x)'=-\sin x$；

⑨$(\tan x)'=\sec^2 x$；

⑩$(\cot x)'=-\csc^2 x$；

⑪$(\sec x)'=\tan x\sec x$；

⑫$(\csc x)'=-\cot x\csc x$；

⑬$(\arcsin x)'=(-\arccos x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

⑭$(\arctan x)'=(-\mathrm{arccot}\, x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) 微分的基本公式

①$\mathrm{d}(C)=0$ (C 为常数)；

②$\mathrm{d}(x^n)=nx^{n-1}\mathrm{d}x$ (n 为实数)；

③$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$ ($a>0, a\neq 1$)；

④$d(e^x)=e^x dx$；

⑤$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \quad (a>0,a\neq 1)$；

⑥$d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$；

⑦$d(\sin x)=\cos x dx$；

⑧$d(\cos x)=-\sin x dx$；

⑨$d(\tan x)=\sec^2 x dx$；

⑩$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$；

⑪$d(\sec x)=\tan x\sec x dx$；

⑫$d(\csc x)=-\cot x\csc x dx$；

⑬$d(\arcsin x)=d(-\arccos x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

⑭$d(\arctan x)=d(-\operatorname{arccot} x)=\frac{1}{1+x^2}dx$.

2. 导数与微分的四则运算法则

(1) 导数的四则运算法则

设 $u(x),v(x)$ 都可导，则

①$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

②$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

③$[Cu(x)]'=Cu'(x) \quad$ (C 是常数)；

④$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x)\neq 0)$；

⑤$\left[\frac{C}{v(x)}\right]'=-\frac{Cv'(x)}{v^2(x)} \quad$ ($v(x)\neq 0$，C 是常数).

(2) 微分的四则运算法则

设 $u=u(x),v=v(x)$ 可微，则

①$d(u\pm v)=du\pm dv$；

②$d(Cu)=Cdu$　（C是常数）；

③$d(uv)=vdu+udv$；

④$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$　$(v\neq 0)$.

3. 复合函数的导数与微分

（1）复合函数的求导法则

如果函数$u=u(x)$在点x处可导，函数$y=f(u)$在对应点u处可导，则复合函数$y=f[u(x)]$在点x处可导，且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

也可记为

$$y'=f'[u(x)]\cdot u'(x).$$

（2）复合函数的微分法则

如果函数$y=f(u)$可微，函数$u=u(x)$也可微，则复合函数$y=f[u(x)]$的微分为

$$dy=f'(u)\cdot u'(x)dx.$$

上式也可以写成$dy=f'(u)du$.这个结论称为一阶微分形式不变性.

四、隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

1. 隐函数的导数

求由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=y(x)$的导数时，有三种方法可采用：

（1）公式法，即$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}(F_y(x,y)\neq 0)$；

（2）利用一阶微分形式的不变性；

（3）利用复合函数求导法则.

2. 由参数方程所确定的函数的导数

对于由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

确定的函数 $y = y(x)$，其中 $x = \varphi(t)$ 具有单调、连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$，且此反函数能与函数 $y = \psi(t)$ 构成复合函数 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$，若 $x = \varphi(t)$ 和 $y = \psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t) \neq 0$，于是根据复合函数的求导法则与反函数的求导法则，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

如果 $x = \varphi(t)$、$y = \psi(t)$ 还是二阶可导的，则有二阶导数公式：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}. \end{aligned}$$

3. 对数求导法

根据隐函数求导法，我们还可以得到一个简化求导运算的方法. 它适用于由几个因子通过乘、除、乘方、开方构成的比较复杂的函数（包括形如 $y = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0, u(x) \neq 1)$ 的幂指函数）的求导. 利用对数函数的运算性质可将原本的函数两边取对数后化乘、除、乘方、开方为代数和，然后利用隐函数求导法或复合函数求导法求导，因此称为对数求导法.

五、高阶导数

1. 高阶导数的定义

如果函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处的导数 $[f'(x)]'$ 存在，则称 $[f'(x)]'$ 为函数 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作

$$f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2} \text{ 或 } \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

类似地,二阶导数的导数称为三阶导数,三阶导数的导数称为四阶导数…….函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 $y=f(x)$ 的 n 阶导数,记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数也称为 n 阶可导,二阶和二阶以上的导数称为高阶导数.

2.常用的高阶导数公式(m,n 均为正整数):

(1) $(e^x)^{(n)}=e^x$;

(2) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(4) $(x^n)^{(n)}=n!$;

(5) $(x^m)^{(n)}=0 \quad (m<n)$;

(6) $(x^m)^{(n)}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \quad (m>n)$;

(7) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a \quad (a>0)$;

(8) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

六、微分中值定理及洛必达法则

1.罗尔定理

设函数 $y=f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) $f(a)=f(b)$,

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使得$f'(\xi)=0$.

2.拉格朗日中值定理

设函数$y=f(x)$满足下列条件:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)内可导,

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

如果函数$y=f(x)$在区间(a,b)内可导且导数恒等于零,即$f'(x)\equiv 0$,则函数$y=f(x)$在区间(a,b)内是一个常数.

如果函数$f(x)$与$g(x)$在区间(a,b)内可导且导数$f'(x)$与$g'(x)$恒相等,即$f'(x)\equiv g'(x)$,则$f(x)$与$g(x)$在区间(a,b)内只相差一个常数C,即$f(x)=g(x)+C$(C为常数).

3.洛必达法则

若函数$f(x)$和$g(x)$满足:

(1) 当$x\to x_0$时,函数$f(x)$及$g(x)$同时趋于零或∞;

(2) 在点x_0的某个去心邻域内,$f'(x)$及$g'(x)$都存在且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$可为实数,也可为$\pm\infty$或$\infty$),

则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

若将洛必达法则中$x\to x_0$换成$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to\pm\infty$,$x\to\infty$,只要相应地修正条件(2),也可得到同样的结论.

对于$0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,0^0,1^∞,∞^0型的未定式,都可以转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式,然后再用洛必达法则求极限.

七、一元函数的单调性、极值与最值的判定

1. 单调性的判定

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少.

2. 极值的判定

(1) 极值存在的必要条件

一般地，若 $f'(x_0)=0$，则称 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的驻点.

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $x=x_0$ 为极值点，则 $f'(x_0)=0$.

函数的极值一般在驻点或者不可导点处取得.

(2) 极值的第一判定定理

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在点 x_0 的某一去心邻域内可导，如果在该邻域内

① 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；而当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值；

② 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；而当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

③ $f'(x)$ 在点 x_0 的两侧不变号，则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

(3) 极值的第二判定定理

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内一阶可导，在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

① 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

② 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

3. 求实际问题的最值

几何与经济方面函数最优化的求解步骤如下：

(1) 根据实际问题的具体情况，建立目标函数关系式；

(2) 求目标函数的极值点，往往也是最值点，即得最优解.

八、曲线的凹凸性、拐点的判定

1. 曲线凹凸性的判定

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内存在二阶导数.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的；

(2) 如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

2. 曲线的拐点

连续曲线凹与凸的分界点称为拐点. 在拐点左右两侧 $f''(x)$ 的符号必然相反，因而在拐点处有 $f''(x)=0$ 或者 $f''(x)$ 不存在；反过来，$f''(x)=0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点可能是曲线的拐点，究竟是否为拐点，还要看该点左右两侧邻域内 $f''(x)$ 的符号是否相反.

九、曲线的渐近线

1. 水平渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$），则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

2. 垂直渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

十、导数在经济学的应用

1. 常用的经济函数

(1) 需求函数

设 Q 表示对商品的需求量，P 表示商品的价格，则 $Q=Q(P)$ 称为需求函数.

需求函数 $Q=Q(P)$ 的反函数反映了商品价格随商品需求量变化的依赖关系，我们称其为价格函数，记为 $P=P(Q)$.

(2) 供给函数

记商品供给量为 S，商品价格为 P，则 $S=S(P)$ 称为供给函数.

产销平衡：理想状态下供给与需求处于平衡状态，即市场上的需求量等于供给量，生产的产品刚好全部卖出去.

(3) 成本函数

总成本指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入的价格或费用总额，由固定成本和可变成本组成. 设 C 是总成本，C_1 是固定成本，C_2 是可变成本，则总成本函数

$$C=C(Q)=C_1+C_2(Q),$$

平均成本函数

$$\overline{C}=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{C_1+C_2(Q)}{Q}.$$

(4) 收益函数

总收益表示生产者出售一定量产品得到的全部收入. 设 Q 为商品销售量，$P=P(Q)$ 为商品价格，则总收益函数

$$R=R(Q)=PQ=P(Q)Q.$$

平均收益函数

$$\overline{R}=\frac{R(Q)}{Q}=\frac{P(Q)Q}{Q}=P(Q).$$

(5) 利润函数

总利润是指生产者出售一定量的产品所得到的总收益与生产这一定量的产品投入的总成本之差. 即总利润函数

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

2. 边际分析

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内可导,则称 $f'(x)$ 为 $y = f(x)$ 的边际函数,$f'(x_0)$ 称为函数 $y = f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的边际值. 其意义是:当 $x = x_0$ 时,若 x 改变一个单位,函数值近似改变 $f'(x_0)$ 个单位.

(1) 边际成本

设总成本函数为 $C = C(Q)$,其中 C 表示总成本,Q 表示产量,则

$$C' = C'(Q)$$

称为边际成本函数.

边际成本 $C'(Q_0)$ 描述了产量为 Q_0 时,总成本 C 对产量 Q 的瞬时变化率,它的意义是:产量为 Q_0 时,若产量再增加一个单位,成本将增加 $C'(Q_0)$ 个单位. 应注意边际成本与平均成本的区别.

(2) 边际收益

设某产品的总收益函数为 $R = R(Q)$,其中 R 表示总收益,Q 表示销售量,则

$$R' = R'(Q)$$

称为边际收益函数.

边际收益 $R'(Q_0)$ 描述了销售量为 Q_0 时,总收益 R 对销售量 Q 的瞬时变化率. 它的意义是:产量为 Q_0 时,每多售出一个单位产品所增加的总收益.

(3) 边际利润

设某产品的总利润函数为 $L = L(Q)$,其中 L 表示总利润,Q 表示

产量或销售量,则

$$L' = L'(Q)$$

称为边际利润函数.

$L'(Q_0)$ 表示产量或销售量为 Q_0 时,再增加生产或销售一个单位产品时所增加的总利润.

如果总收益函数为 $R(Q)$,总成本函数为 $C(Q)$,则总利润为

$$L(Q) = R(Q) - C(Q),$$

边际利润为

$$L'(Q) = R'(Q) - C'(Q).$$

3. 需求对价格的弹性

设某商品的需求函数为 $Q = f(P)$,且在 P 处可导,则需求量 Q 对价格 P 的弹性为

$$\frac{EQ}{EP} = -P\frac{f'(P)}{f(P)}.$$

当 $P = P_0$ 时,需求弹性为

$$\left.\frac{EQ}{EP}\right|_{P=P_0} = -P_0\frac{f'(P_0)}{f(P_0)},$$

其经济意义是:当价格为 P_0 时,若价格上涨(下降)1%,需求量将减少(增加) $\left.\frac{EQ}{EP}\right|_{P=P_0}$%.

第三章　一元函数积分学

一、不定积分

1. 原函数

设函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的已知函数，如果存在可导函数 $F(x)$，在区间 I 上对任意的 x 都有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

若函数 $f(x)$ 在某区间内连续，则函数 $f(x)$ 在该区间内的原函数一定存在.

2. 不定积分的概念

若函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则函数 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中，式中的 $\int$ 称为积分号，x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，C 称为积分常数.

3. 不定积分的性质

(1) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则有

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$，或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$.

(4) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$，或 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$.

4. 基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$　(k 是常数)；

(2) $\int x^n\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$　($n \neq -1$)；

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$；

(4) $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$　($a > 0, a \neq 1$)；

(5) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$；

(6) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

(7) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

(8) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$；

(9) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$；

(10) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

(11) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

(12) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

(13) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

(14) $\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$；

(15) $\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a>0)$；

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$；

(17) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$；

(18) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a>0)$；

(19) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C \quad (a>0)$；

(20) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C \quad (a>0)$；

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C \quad (a>0)$；

(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C \quad (a>0)$；

(23) $\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

(24) $\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

5. 换元积分法

(1) 第一换元法

设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则对于任意积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$，如果 $g(x)\mathrm{d}x = f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$，则有换元公式

$$\int g(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

上述求不定积分的方法称为第一换元法. 它应用的关键是将被积

表达式 $g(x)\mathrm{d}x$"凑成"$f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$ 的形式，因而这种积分法也称为"凑微分法".

常用的凑微分的等式如下(a,b 为常数，$a\neq 0$)：

① $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax)=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$；

② $x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$；

③ $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}(\sqrt{x})$；

④ $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$；

⑤ $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln|x|)$；

⑥ $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$；

⑦ $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$；

⑧ $\sec^2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$；

⑨ $\csc^2x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cot x)$；

⑩ $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{d}(\arcsin x)=-\mathrm{d}(\arccos x)$；

⑪ $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{d}(\arctan x)=-\mathrm{d}(\mathrm{arccot}x)$.

(2) 第二换元法

设 $x=\psi(t)$ 是单调、可导的函数，且 $\psi'(t)\neq 0$. 又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)},$$

其中 $\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

第二换元公式的应用如下：

① 当被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ (n 为正整数，a,b 为常数，且 $a\neq$

0）时，可令 $\sqrt[n]{ax+b}=u$，作变量代换 $x=\frac{1}{a}(u^n-b)$.

② 当被积函数含有两种或两种以上根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可令 $x=u^n$（其中 n 为各个根式指数 $k,\cdots,l$ 的最小公倍数）.

③ 当被积函数含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 时，可使用三角代换.

一般地，$a>0$ 时，当被积函数含有

(i) $\sqrt{a^2-x^2}$，可作代换 $x=a\sin u(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2})$；

(ii) $\sqrt{x^2+a^2}$，可作代换 $x=a\tan u(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2})$；

(iii) $\sqrt{x^2-a^2}$，可作代换 $x=a\sec u$（$x>a$ 时，$0<u<\frac{\pi}{2}$；$x<-a$ 时，令 $t=-x$，则 $t>a$）.

注：不论使用第一换元法还是第二换元法求不定积分，最后一定要记得变量回代.

6. 分部积分法

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数. 那么这两个函数乘积的导数公式为 $(uv)'=u'v+uv'$，移项得

$$uv'=(uv)'-u'v.$$

对这个等式两边求不定积分，得

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x,$$

上述公式称为分部积分公式.

为简便起见，也可把分部积分公式写成下面的形式：

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

分部积分法求不定积分常见的形式如下表：

积分形式	$u,\mathrm{d}v$ 的选法	目的
$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \mathrm{e}^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	$u=P_n(x),\mathrm{d}v=\begin{Bmatrix} \mathrm{e}^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	降低多项式 $P_n(x)$ 的次数
$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arctan x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	$u=\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arctan x \end{Bmatrix},\mathrm{d}v=P_n(x)\mathrm{d}x$	“消”ln,arcsin,arctan 等函数符号
$\int \mathrm{e}^x\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	$\begin{cases} u=\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u=\mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v=\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x \end{cases}$	“回头积分”

注:表中 $P_n(x)$ 是 n 次多项式.另外要多次运用分部积分法时,注意每次选取 u 的函数类型应该一致.

7.几种特殊类型函数的积分

(1)分母是二次多项式的有理函数的积分

所谓有理函数(即有理分式),就是两个多项式之商 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 所表示的函数.

若被积有理分式为假分式,可以用多项式除法把它化成一个整式(即多项式)与一个真分式之和.

若被积真分式的分母可分解为两个一次因式的乘积,就将其分成两个分母为一次式的有理式的代数和,然后对两个有理式分别求不定积分.

若被积真分式的分母不能分解成两个一次因式的乘积,则采用配方法及凑微分法求解.

(2)简单三角函数有理式的积分

由于 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 等三角函数可以表示为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理式,故三角函数的有理式指的是由 $\sin x$、$\cos x$ 和常数经过有限次

四则运算所构成的函数，一般形式为

$$\int \frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}\mathrm{d}x,$$

其中 P、Q 是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的多项式函数.

对于三角函数有理式的积分常常采用换元法.

(3) 形如 $\int \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$（$m,n$ 为非负整数）的积分

① 当 m,n 中至少有一个是奇数时，将奇数次幂拆出一次方凑微分，从而将所求积分化为三角函数的多项式的积分.

② 当 m,n 均为偶数时，常用三角公式变换进行“降次倍角”处理.

(4) 简单无理函数的积分

① 形如 $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $a\neq 0$，此时令 $\sqrt[n]{ax+b}=u$.

② 形如 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $ad-bc\neq 0$，此时令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=u$.

二、定积分的概念与计算

1. 定积分的概念

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，用任意的 $n-1$ 个分点：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$. 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i=1,2,\cdots,n$）为第 i 个小区间的长度. 在第 i 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i（$i=1,2,\cdots,n$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 的和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 存在，并且极限值与

区间$[a,b]$的划分方法及$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$的选取方式无关，则称函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，且称此极限为函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

其中$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$称为被积表达式，x称为积分变量，$[a,b]$称为积分区间，a、b分别称为积分下限和积分上限.

2. 定积分的存在定理

(1) 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必定存在.

(2) 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$必定存在.

3. 定积分的性质

下列各性质中积分上、下限的大小，如不特别指明，均不加限制；并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

(1) 当$a=b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 两个可积函数代数和的定积分等于定积分的代数和，即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

该性质对任意有限个可积函数都是成立的.

(4) 被积函数中的常数因子可以提到积分号外，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\quad(k\text{ 为常数}).$$

(5) 如果在$[a,b]$上,$f(x)=k$,则

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a).$$

(6)(可加性) 不论a,b,c的相对位置如何,总有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(7) 如果在区间$[a,b]$上,$f(x)\geqslant 0$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (a<b).$$

(8) 如果在区间$[a,b]$上,$f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

(9) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad (a<b).$

(10)(估值定理) 设M和m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \quad (a<b).$$

(11)(积分中值定理) 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则在区间$[a,b]$上至少存在一点ξ,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

根据积分中值公式所得的$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$称为函数$f(x)$在$[a,b]$上的平均值.因此积分中值定理也叫作平均值定理.

(12) 设函数$f(x)$为$[-a,a]$上的连续函数($a>0$),则有

① 当函数$f(x)$为奇函数时,

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0;$$

② 当函数$f(x)$为偶函数时,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

4. 变限积分函数及其导数

(1) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则积分上限函数 $\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导,且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t = f(x), x \in [a,b].$$

对变下限的积分 $\int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$,有

$$\left[\int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t\right]' = \left[-\int_{b}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right]' = -f(x).$$

(2) 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,$\varphi(x)$ 为可导函数,且 $\varphi(x)$ 的值域 $R\varphi \subset [a,b]$,则有

$$\left[\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

(3) 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 均为可导函数,且 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 的值域 $R\varphi_1 \subset [a,b]$,$R\varphi_2 \subset [a,b]$,则有

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x).$$

(4) 如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,则函数 $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的一个原函数.

5. 牛顿 — 莱布尼茨公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

6. 定积分的换元法与分部积分法

(1) 定积分的换元法

假设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,函数$x=\varphi(t)$满足条件:

①$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$;

②$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上具有连续导数,且其值域$R_{\varphi}=[a,b]$,则有

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 定积分的分部积分法

依据不定积分的分部积分法,可得

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\left[u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x\right]\Big|_{a}^{b}$$

$$=u(x)v(x)\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b} v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

简记作$\int_{a}^{b} uv'\mathrm{d}x=uv\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b} vu'\mathrm{d}x$,或$\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v=uv\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b} v\mathrm{d}u$.

计算定积分的最基本方法是牛顿—莱布尼茨公式,如果被积函数的原函数不易求,可使用换元法和分部积分法.需要注意的是用换元法求定积分时,换元一定要换积分上下限.

注:换元法与分部积分法求定积分与求不定积分方法是一样的.不同的是换元法求定积分不需要变量回代,只需将换元后的变量上下限代入即可.

补充:

$$I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}(n\text{ 为大于 1 的正奇数}),I_1=1,\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}(n\text{ 为正偶数}),I_0=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

三、无穷区间上的广义积分

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$. 我们把极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$ 在无穷区间$[a,+\infty)$ 上的广义积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

如果极限存在，称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果极限不存在，则称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,b]$ 上连续，取 $t<b$. 极限

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$ 在无穷区间$(-\infty,b]$ 上的广义积分，记作$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果极限存在，称广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，就称广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 上连续，广义积分

$$\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和} \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间$(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分，记作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\mathrm{d}x.$$

如果广义积分$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则就称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且记$F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$，若 $F(\pm\infty)$ 存在，则

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) = F(+\infty) - F(a);$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = F(b) - F(-\infty);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = F(+\infty) - F(-\infty).$$

四、定积分的应用

1. 平面图形的面积

(1) 由曲线 $y = f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 及直线 $x = a, x = b(a < b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中，被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 就是直角坐标下的面积微元，它表示高为 $f(x)$、底为 $\mathrm{d}x$ 的一个矩形面积.

(2) 由上、下两条连续曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x)(f_2(x)\geqslant f_1(x))$ 及两条直线$x = a, x = b(a < b)$ 所围成的平面图形，其面积微元为$\mathrm{d}A = [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$，面积计算公式为

$$A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

(3) 由左、右两条连续曲线 $x=g_1(y)$，$x=g_2(y)(g_2(y)\geqslant g_1(y))$ 及两条直线 $y=c,y=d(c<d)$ 所围成的平面图形，其面积微元 $\mathrm{d}A=[g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y$，面积计算公式为

$$A=\int_c^d[g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y.$$

2. 旋转体的体积

(1) 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为

$$V=\int_a^b\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 由曲线 $x=\psi(y)$，直线 $y=c,y=d(c<d)$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为

$$V=\int_c^d\pi x^2\mathrm{d}y=\pi\int_c^d\psi^2(y)\mathrm{d}y.$$

第四章　向量代数与空间解析几何(数学一)

一、向量代数

1. 空间中两点间的距离

空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2. 向量的基本概念

向量:既有大小又有方向的量. $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

向量的模:向量的大小. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

单位向量:模为 1 的向量. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,与其反方向的单位向量为 $-\boldsymbol{a}^0 = -\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

零向量:模为 0 的向量,记作 $\mathbf{0}$.

方向角与方向余弦:非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的夹角分别为 α、β、γ,称其为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,而 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦,且

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

3.向量的运算

(1)线性运算

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\lambda$ 为实数,则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

(2)数量积与向量积

数量积:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,其中$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,且 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.

向量积:$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$,且 $\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$.

向量积的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 在几何意义上表示以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

4.向量的性质(λ 为实数)

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$;

(4)$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

(5)$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(6)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(7)$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$;

(8)$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;

(9)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

5.向量间的关系

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,且 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之间的

夹角为 θ,且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

(1)$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$;

(2)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 夹角 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}=\lambda$($\lambda$ 为常数);

(3)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$;

(4)$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

二、空间平面

1.空间平面方程的形式

点法式方程:过空间一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

一般式方程:将点法式方程整理后可得 $Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0$,记 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$,则有 $Ax+By+Cz+D=0$.

截距式方程:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,$a$、$b$、$c$ 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距.

2.两平面的位置关系

设两个平面方程为 π_1:$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,π_2:$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 分别为平面 π_1 和 π_2 的法向量.

(1) 若两平面的夹角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

(2)① 两平面平行等价于 $\boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2$,所以两平面平行(但不重合)及两平面重合的充要条件分别为:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2} \text{及} \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2};$$

② 两平面相交的充要条件为 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ 不成立;

③ 两平面垂直等价于 $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$,即 $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2=0$,所以两平面垂直的充要条件为:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

3. 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4. 两平行平面的距离

两平行平面 π_1:$Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 π_2:$Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离公式为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

三、空间直线

1. 空间直线方程的形式

一般式方程:相交的两平面交于一直线,所以直线方程可由两个相交的平面方程联立表示,即 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$

点向式方程:过空间一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 的直线方程为 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

参数方程:令$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$,则$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}$

两点式方程:已知直线 l 经过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,则直线方程为$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

2. 两直线的位置关系

设两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

(1) 若两直线的夹角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

(2)① 直线 $l_1\perp l_2$ 的充要条件为 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

② 直线 $l_1 /\!/ l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合的充要条件为$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

3. 直线和平面的位置关系

设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$,平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

(1) 若直线与平面的夹角为 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

(2)① 直线与平面垂直的充要条件为 $\boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n}$,即$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$;

② 直线与平面平行或直线在平面上的充要条件为 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$,即 $Am+Bn+Cp=0$.

四、空间曲面

(1) 球面:球心为 $C(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

(2) 旋转曲面：yOz 面上的曲线$\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转得到的曲面方程为$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$，绕 y 轴旋转得到的曲面方程为$f(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$. 类似可得到其他面上的曲线绕坐标轴旋转形成的旋转曲面.

若二次曲面方程中，变量 x^2、y^2、z^2 中有两个系数相同，则此曲面为旋转曲面，且其旋转轴为第三个变量所在的坐标轴.

(3) 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$，$a$、$b$、$c$ 为椭球面的半轴. 当 a、b、c 三者中有两个相同时，则方程表示旋转椭球面.

(4) 柱面：$f(x,y)=0$ 表示以 xOy 面上曲线$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$为准线，母线为平行于 z 轴的直线所形成的柱面. 类比可得柱面 $g(y,z)=0$、$h(x,z)=0$ 的准线与母线.

圆柱面：$x^2+y^2=R^2$；

椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

抛物柱面：$x^2-2py=0(p\neq 0)$.

(5) 正锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

当 $a=b$ 时，$x^2+y^2=\dfrac{a^2}{c^2}z^2$ 为圆锥面.

(6) 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

当 $a=b$ 时，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 称为旋转单叶双曲面.

(7) 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

当 $a=b$ 时，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 称为旋转双叶双曲面.

(8) 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$($p$ 与 q 同号).

当 $p=q$ 时，方程化为 $x^2+y^2=2pz$，它可以看作 yOz 面上抛物线 $z=\frac{y^2}{2p}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转抛物面，也可视为 xOz 面上曲线 $z=\frac{x^2}{2p}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转抛物面.

(9) 双曲抛物面(或鞍形曲面)：$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$($p$ 与 q 同号).

第五章　多元函数微分学

一、多元函数的偏导数与全微分

1. 二元函数的定义域与极限

二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域是指使函数有意义的自变量 x,y 的值所组成的区域.可依据一元函数的方法求解.

二元函数的极限问题有时可先转化为一元函数的极限问题,使用的方法常常也是一元函数求极限的方法.

2. 一阶偏导数

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义,当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应的函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$,如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\ 或\ f_x(x_0,y_0);$$

类似地,如果极限$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\ 或\ f_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点(x,y)处对 x 的偏导数都

存在,那么这个偏导数就是 x、y 的函数,称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x \text{ 或 } f_x(x,y).$$

类似地,可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y \text{ 或 } f_y(x,y).$$

3. 多元函数的二阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$,它们仍是两个二元函数,如果这两个函数的偏导数存在,就称其为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.按照对变量求偏导次序的不同,二元函数 $z=f(x,y)$ 有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数都在区域 D 内连续,则在该区域内有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

4. 全微分

(1)(全微分的充分条件) 如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 处连续,则函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微.

(2)(全微分的必要条件) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,则

函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处偏导数存在，且 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

如果函数$u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)处可微，则函数$u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)处偏导数存在，且 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$.

5. 二元函数可微、连续、偏导存在及偏导连续之间的关系

$$\boxed{f_x(x,y),f_y(x,y)\text{ 在点}(x_0,y_0)\text{连续}}$$

$$\Downarrow \qquad \not\Uparrow$$

$$\boxed{z=f(x,y)\text{ 在点}(x_0,y_0)\text{可微，且 }\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y}$$

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \quad \not\Uparrow$$

$$\boxed{f(x,y)\text{ 在点}(x_0,y_0)\text{连续}} \begin{matrix}\not\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}z=f(x,y)\text{ 在点}(x_0,y_0)\text{处偏导数存在，且}\\ f_x(x_0,y_0)=A,f_y(x_0,y_0)=B\end{matrix}}$$

6. 全微分形式不变性

$z=f(u,v)=f[u(x,y),v(x,y)]$的全微分

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

这表明当f,u,v都是可微函数时，当u,v是中间变量时函数$z=f(u,v)$的全微分与u,v是自变量时的全微分具有相同的形式，这种性质称为全微分形式不变性.

7. 复合函数的链式法则

(1) 设函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$在点(x,y)处有连续偏导数，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)处有连续偏导数，则复合函数$z=f[u(x,y),v(x,y)]$在点(x,y)处有对x与y的连续偏导数，且有下列链式法则：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

上述公式还可推广到多个中间变量的情形.

(2) 若 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t};$$

(3) 设 $z=f(u,x)$，$u=\varphi(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

在求解复合函数的一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$后，按二阶偏导数定义再对其求偏导，可得到相应的二阶偏导数.

8. 隐函数的偏导数

(1) 设 $y=y(x)$ 是由方程$F(x,y)=0$所确定的函数，由多元复合函数的求导法则，对$F(x,y)=0$ 两边求关于 x 的导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

即 $F_x+F_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. 若 $F_y\neq 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

(2) 已知由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的二元隐函数 $z=f(x,y)$，对$F(x,y,z)=0$ 两边求关于 x,y 的偏导数，得：

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

若 $F_z\neq 0$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

在求解出隐函数 $F(x,y,z)=0$ 的一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$后，按二阶偏导数定义再对其求偏导，可得到相应的二阶偏导数.

二、偏导数的几何应用

1. 曲线的切线与法平面

已知空间曲线 C 的参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}$在 t_0 处的对应点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，则

(1) 若 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 在 t_0 处可导且导数不同时为零，那么此时切线的方向向量为$\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$，从而曲线 C 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)};$$

(2) 曲线 C 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为：

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

2. 曲面的切平面与法线

已知曲面方程 $F(x,y,z)=0$，过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 且完全在曲面上的曲线为 C，其参数方程为$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t).\end{cases}$因此 $F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$.

两边对 t 求导，在 $t=t_0$ 处（亦即在点 M 处）有

$$(F_x)|_M x'(t_0)+(F_y)|_M y'(t_0)+(F_z)|_M z'(t_0)=0.$$

(1) 由于向量$\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$正是曲线 C 在点 M 的切线向

量，所以向量$\{(F_x)|_M,(F_y)|_M,(F_z)|_M\}$是和这条切线垂直的. 又由于所取曲线$C$的任意性，可知曲面上任何一条通过点$M$的曲线，它在点$M$的切线皆垂直于向量$\{(F_x)|_M,(F_y)|_M,(F_z)|_M\}$，因此这些切线应位于同一平面上，这个平面称为曲面在点M的切平面，而向量$\{(F_x)|_M,(F_y)|_M,(F_z)|_M\}$就是切平面的法向量，于是切平面方程为：

$$(F_x)|_M(x-x_0)+(F_y)|_M(y-y_0)+(F_z)|_M(z-z_0)=0;$$

(2) 通过点M与切平面垂直的直线，称为曲面在点M处的法线，于是法线的方程为：

$$\frac{x-x_0}{(F_x)|_M}=\frac{y-y_0}{(F_y)|_M}=\frac{z-z_0}{(F_z)|_M}.$$

三、多元函数的极值及其求法

1. 二元函数极值的判定

设二元函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处具有偏导数，且在该点取得极值，则$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$.

两个偏导数都为0的点称为二元函数$z=f(x,y)$的驻点. 驻点不一定就是极值点.

设二元函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$的某一邻域D内连续，且有连续的一、二阶偏导数，$M_0(x_0,y_0)$是驻点，令$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，判别式$\Delta=B^2-AC$，则

(1) 当$\Delta<0$时，点$M_0(x_0,y_0)$是极值点. 且当$A<0$时，点$M_0(x_0,y_0)$是极大值点；当$A>0$时，点$M_0(x_0,y_0)$是极小值点；

(2) 当$\Delta>0$时，点$M_0(x_0,y_0)$不是极值点；

(3) 当$\Delta=0$时，结论不定.

2. 条件极值

求函数$z=f(x,y)$在$\varphi(x,y)=0$的条件下的可能极值点的

步骤为:

(1) 作拉格朗日函数 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,其中 λ 是一待定常数;

(2) 求 $L(x,y)$ 对 x 与 y 的一阶偏导数,并令其为零,然后与 $\varphi(x,y)=0$ 联立求解,即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

由此方程组解出 x,y,λ,所得的点 (x,y) 即是 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点.

第六章　多元函数积分学(数学一)

一、二重积分的性质及计算

1. 二重积分的性质

若 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积,则

(1) 若在 D 上 $f(x,y)\equiv 1$,则$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = S_D$,其中 S_D 为积分区域 D 的面积.

(2)(线性性质) 设 a、$b\in\mathbf{R}$,则

$$\iint\limits_D [af(x,y)\pm bg(x,y)]\mathrm{d}\sigma = a\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm b\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(3)(积分区域的可加性) 设 $D=D_1\cup D_2$,且除边界外 $D_1\cap D_2=\varnothing$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(4)(估值定理) 设 M 与 m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值,则

$$mS_D \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MS_D,$$

其中 S_D 为积分区域 D 的面积.

(5)(积分中值定理) 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续,S_D 是积分区域 D 的面积,则至少存在一点$(\xi,\eta)\in D$,使得$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D$.

(6)(保号性) 设 $f(x,y)\geqslant 0$,$(x,y)\in D$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$.

① 设 $f(x,y) \leqslant g(x,y),(x,y) \in D$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

② 在 D 上,有$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$.

(7)① 设积分区域 D 关于 y 轴对称,D_1 是 D 的右半部分,

若 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$;

若 $f(-x,y)=f(x,y)$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

② 设积分区域 D 关于 x 轴对称,D_1 是 D 的上半部分,

若 $f(x,-y)=-f(x,y)$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$;

若 $f(x,-y)=f(x,y)$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

2.二重积分的计算

(1) 若用不等式

$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), a \leqslant x \leqslant b$$

来表示积分区域 D,其中函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,则称区域 D 为 X-型区域,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 若用不等式

$$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), c \leqslant y \leqslant d$$

来表示积分区域 D,其中函数 $\psi_1(y),\psi_2(y)$ 在区间$[c,d]$上连续,则称区域 D 为 Y-型区域,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 由于直角坐标与极坐标的对应关系为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,于

是 $f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$，则二重积分在极坐标系中的表达式为

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

(4) 直角坐标系下交换积分次序时，先依据给定的二次积分限，写出积分区域 D 的不等式表达式，并画出区域 D 的图形；再依据区域 D 的图形，确定出另一种积分次序的积分限.

二、二重积分的应用

1. 平面图形的面积

设平面区域 D 由 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 所围成，且两条曲线交点的横坐标为 a 和 b $(a<b)$，则平面区域 D 的面积为

$$A=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{a}^{b}|g(x)-f(x)|\mathrm{d}x.$$

在极坐标系下，有 $A=\iint\limits_{D}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

2. 空间几何体的体积

(1) 曲顶柱体的体积：设柱体上顶是连续曲面 $z=f(x,y)$ $(f(x,y)\geqslant 0)$，下底是平面 $z=0$ 上的区域 D，侧面是以 D 的边界线为准线，母线平行于 Oz 轴的柱面，则柱体的体积 $V=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 几何体的体积：设几何体是由连续曲面 $z=f(x,y)$ 与 $z=\varphi(x,y)$ $(\varphi(x,y)\geqslant f(x,y))$ 所围成的，且几何体在 xOy 面的投影为 D，则几何体的体积

$$V=\iint\limits_{D}[\varphi(x,y)-f(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

三、曲线积分

1. 第二类(对坐标的) 曲线积分的性质

(1) 设 L 是有向曲线弧，$-L$ 是与 L 相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

(2) 被积函数的常数因子可以提到积分号外，即

$$\int_L k\boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{s} = k\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

(3) 设有向曲线弧 L 可分为两段光滑的有向曲线弧 L_1，L_2，则

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

2. 第二类曲线积分的计算

(1) 若有向曲线 L 的方程为 $y=y(x)$，曲线 L 起点的横坐标为 $x=a$，终点的横坐标为 $x=b$（这里 a 不一定小于 b），函数 $y(x)$ 在 $[a,b]$（或 $[b,a]$）上有一阶连续导数，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \cdot y'(x)]\mathrm{d}x.$$

(2) 若有向曲线 L 的方程由 $x=x(y)$ 给出，$y=c$ 是曲线 L 起点的纵坐标，$y=d$ 是其终点的纵坐标（这里 c 不一定小于 d），函数 $x(y)$ 在 $[c,d]$（或 $[d,c]$）上有一阶连续导数，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d [P(x(y),y) \cdot x'(y) + Q(x(y),y)]\mathrm{d}y.$$

(3) 若有向曲线 L 由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 给出，参数 $t=\alpha$ 对应曲线 L 的起点，$t=\beta$ 对应曲线 L 的终点（这里 α 不一定小于 β），函数 $x(t)$、$y(t)$ 在以 α 和 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$，则

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\ =&\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

四、格林公式

1. 格林公式

设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有一阶连续偏导数，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中 L 为区域 D 的边界曲线，并取正方向，上式称为格林(Green)公式.

边界曲线的正方向规定为：当人沿边界行走时，区域 D 总在他的左边.

2. 积分与路径无关

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 上有连续一阶偏导数，则以下三个结论等价：

① 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关；

② $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$，其中 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线；

③ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\forall(x,y)\in D$.

满足上述条件则可以改变积分路径计算.

第七章　无穷级数

一、常数项级数的概念及性质

1. 常数项级数的概念

设有数列$\{u_n\}$，则称

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

为（常数项）无穷级数，简称常数项级数或级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. 其中 u_n 称为级数的通项或一般项.

令 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n(n=1,2,\cdots)$，则称数列$\{S_n\}$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列，如果部分和数列$\{S_n\}$有极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，这时极限 S 叫做级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和.

如果部分和数列$\{S_n\}$没有极限，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于S，此时称 $r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的余项.

显然，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

2. 级数收敛的必要条件

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n \neq 0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

3.收敛级数的基本性质

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$(常数$k \neq 0$)的敛散性相同,且若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$S$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$收敛于$kS$.

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于$S_1,S_2$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛,其和为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = S_1 \pm S_2$.

(3) 在级数中去掉、加上或改变有限项,不会改变该级数的敛散性.

(4) 收敛级数加括号后所成的级数仍收敛于原级数的和.

二、常数项级数的判别法

1.正项级数的判别法

(1) 正项级数的定义

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,若$u_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数.

(2) 比较判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数,且$u_n \leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,

① 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛;

② 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

比较判别法的极限形式:设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均是正项级数,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l$,

① 若$0 < l < +\infty$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或同时发散;

② 若 $l=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

③ 若 $l=+\infty$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(3) 比值判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是一个正项级数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

① 当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

② 当 $\rho>1\left(\text{或}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty\right)$ 时，级数发散；

③ 当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛，也可能发散.

2. 交错级数的判别法

(1) 定义：形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$（其中 $u_n>0, n=1, 2,\cdots$）的级数称为交错级数.

(2) 莱布尼茨判别法

如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

① $u_n\geqslant u_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$；

② $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和 $S\leqslant u_1$.

3. 绝对收敛与条件收敛

对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，

(1) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛，且称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

(2) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

4. 常见级数的敛散性

(1) 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.

(2) p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}发散, p\leqslant 1,\\ 收敛, p>1.\end{cases}$

(3) 等比级数(也称几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots(a\neq 0)$$

当 $|q|<1$ 时收敛于 $\frac{a}{1-q}$，否则发散.

三、幂级数

1. 阿贝尔定理

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 时收敛，则对于所有满足 $|x|<|x_0|$ 的点 x，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛. 反之，如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 时发散，则对于所有满足 $|x|>|x_0|$ 的点 x，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散.

2. 收敛半径、收敛区间和收敛域

(1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛点的全体称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域.

(2) 满足 $|x|<R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，$|x|>R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散的

数 $R(R\geqslant 0)$ 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径，开区间 $(-R,R)$ 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间. 再结合区间端点 $x=\pm R$ 时的敛散性，即可求得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域.

(3) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，

① 若 $\rho\neq 0$ 且 $\rho\neq+\infty$，则 $R=\dfrac{1}{\rho}$；

② 若 $\rho=0$，则 $R=+\infty$；

③ 若 $\rho=+\infty$，则 $R=0$.

3. 幂级数的基本性质

(1) 设两个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1,R_2，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,\ |x|<R,$$

其中 $R=\min\{R_1,R_2\}$.

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

(3)(微分运算) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可导，且有逐项求导公式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=S'(x),$$

其收敛区间为 $(-R,R)$.

(4)(积分运算) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

其收敛区间为$(-R,R)$.

四、函数展开为幂级数

1.泰勒级数与马克劳林级数

如果设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶的导数,则下式右端的多项式就成为一个幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots,$$

我们称上式为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数.

如果 $f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x)$,即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

我们就说 $f(x)$ 可以展开成泰勒级数,并称上式为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒展开式.

当 $x_0 = 0$ 时,上式成为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

右端的级数称为 $f(x)$ 的马克劳林(Maclaurin)级数,该式称为 $f(x)$ 的马克劳林展开式.

2.直接展开法

直接展开法是指先利用公式 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=1,2,3,\cdots)$ 计算出幂级数的系数,写出对应的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$;然后讨论

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x_0 与 x 之间. 若$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

3. 间接展开法

间接展开法是指利用一些已知的函数幂级数展开式，经过变量代换以及幂级数的加减运算、微分运算（逐项求导）、积分运算（逐项积分）等，将所给的函数展开成幂级数.

常用函数的马克劳林展开式如下：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots,x\in(-1,1];$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1).$$

第八章　常微分方程

一、微分方程的基本概念

1. 线性微分方程：微分方程中所含的未知函数及其各阶导数全是一次幂，形如

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

的方程称为 n 阶线性微分方程，其中 $a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 是 x 的已知函数.

2. 微分方程的阶：方程中未知函数的最高阶导数的阶数 n 叫作该微分方程的阶，同时该方程叫作 n 阶微分方程.

3. 微分方程的解：代入微分方程后能使方程成为恒等式的函数 $y=f(x)$.

4. 通解：解中所含任意常数相互独立，且个数与方程的阶数相同.

5. 特解：不含任意常数的解.

6. 初值问题：求微分方程满足初始条件的特解的问题.

7. 初值问题特解：通过初始条件确定的不含任意常数的解.

二、可分离变量的微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

设有一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$，如果其右端函数能分解成 $F(x,y)=f(x)\cdot g(y)$，即有

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y), \qquad ①$$

则称该方程为可分离变量的微分方程，其中 $f(x),g(y)$ 都是连续函数.

方程 ① 两边同乘以$\frac{\mathrm{d}x}{g(y)}(g(y)\neq 0)$分离变量,并求积分$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$,进而可得通解.

注:如果 $g(y_0)=0$,则易知 $y=y_0$ 也是方程的解.

三、一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

称为一阶线性微分方程,当 $Q(x)\equiv 0$ 时,方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0,$$

称它为一阶齐次线性微分方程,其通解为 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$;当 $Q(x)\neq 0$ 时,称为一阶非齐次线性微分方程,其通解为:

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

四、二阶常系数线性微分方程

1. 二阶齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 解的结构

如果函数 y_1 和 y_2 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解,则函数 $y=C_1y_1+C_2y_2$(C_1,C_2 为任意常数)也是该方程的解.

如果函数 y_1 和 y_2 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个线性无关的特解,则函数 $y=C_1y_1+C_2y_2$(C_1,C_2 为任意常数)是该方程的通解.

2. 二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解

二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程为 $r^2+pr+q=0$,解得其特征根为 r_1、r_2,则其通解情况如下:

特征根	通解
两个不相等的实根 r_1、r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta,\beta\neq 0$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

3. 二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 解的结构

设函数 y^* 是二阶非齐次线性微分方程的一个特解，函数 $\overline{Y}$ 是与其对应的齐次线性微分方程的通解，则 $y=\overline{Y}+y^*$ 是该方程的通解.

4. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解

特解形式如下：

右端项 $f(x)$	特解形式
$P_n(x)$	0 不是特征方程的根：$y^*=Q_n(x)$ 0 是特征方程的单根：$y^*=xQ_n(x)$ 0 是特征方程的重根：$y^*=x^2Q_n(x)$
$e^{\lambda x}P_n(x)$	λ 不是特征方程的根：$y^*=e^{\lambda x}Q_n(x)$ λ 是特征方程的单根：$y^*=xe^{\lambda x}Q_n(x)$ λ 是特征方程的重根：$y^*=x^2e^{\lambda x}Q_n(x)$
$e^{\lambda x}[P_n(x)\sin\omega x+Q_m(x)\cos\omega x]$	$\lambda\pm i\omega$ 不是特征方程的根：$y^*=e^{\lambda x}[S_l(x)\cos\omega x+T_l(x)\sin\omega x]$ $\lambda\pm i\omega$ 是特征方程的根：$y^*=xe^{\lambda x}[S_l(x)\cos\omega x+T_l(x)\sin\omega x]$

注：表中 $P_n(x)$、$Q_n(x)$ 均为 n 次多项式，Q_m 为 m 次多项式，$S_l(x)$，$T_l(x)$ 为 l 次多项式，其中 $l=\max\{m,n\}$.

5. 叠加原理

若 y_1 为方程 $y''+py'+qy=f_1(x)$ 的解，y_2 为方程 $y''+py'+qy=f_2(x)$ 的解，则 $y=y_1+y_2$ 为方程 $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$ 的解.

第九章　线性代数

一、行列式的概念

1. 二阶和三阶行列式

（1）二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

（2）三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2. n 阶行列式

（1）余子式和代数余子式

在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，去掉元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 所在的行和列，我们将剩下的元素按原来的次序构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2)n阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k},$$

其中 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$ 为第一行各元素的代数余子式.

(3) 代数余子式的重要性质

①n阶行列式D等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和;

②n阶行列式D的任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i\neq j; \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i\neq j. \end{cases}$$

(4) 常见的特殊行列式

① 主对角线以外的元素全为 0 的行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

② 次对角线以外的元素全为 0 的行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n ;$$

③n 阶上三角行列式(主对角线以下的元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} ;$$

④n 阶下三角行列式(主对角线以上的元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} .$$

二、行列式的性质与计算

1. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

互换 i, j 两行(列),记为 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$.

推论:如果行列式有两行(列)的对应元素完全相同,则此行列式等于零.

(3) 用数 k 乘行列式的某一行(列)中所有元素等于用 k 乘行列式.

k 乘第 i 行(列)记为 $kr_i (kc_i)$.

推论 1:如果行列式某行(列)的所有元素有公因式,则公因式可以提到行列式外面.

推论 2:行列式中有一行(列)元素全为零,则此行列式等于零.

(4) 行列式如果有两行(列)元素对应成比例,则此行列式等于零.

(5) 若行列式的某一行(列)的元素皆为两数之和,则此行列式等于两个行列式之和.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数 k,然后加到另一行(列)对应元素上去,行列式的值不变.

注:由(1)可知,行列式中的行与列的地位是对等的,行列式的性质中凡是对行成立的,对列也同样成立,反之亦然.

2. 行列式的计算

(1) 行列式按定义对某一行或列计算时,常常选取零元素最多的行或列,减少计算量. 也可利用行列式的性质将某一行或某一列化为仅有一个非零元素,然后按这一行或这一列展开.

(2) 行列式的计算,首先应观察行列式的特点,看其是否有特殊

性，比如两行或两列对应成比例；比如每行或每列元素相加等于常数；当行列式为普通行列式时，可以选择某一行或某一列展开，也可以先用行列式的性质把它化为上三角或下三角行列式后再计算.

三、克莱姆法则

设有 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{①}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{②}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时，称方程组 ① 为非齐次线性方程组，称方程组 ② 为齐次线性方程组，称系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方程组 ①、② 的系数行列式.

(1) 如果线性方程组 ① 的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组 ① 有且仅有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素依次用方程组右端的常数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},j=1,2,\cdots,n.$$

(2) 如果系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组 ② 只有零解. 如果系数行列式 $D=0$，则齐次线性方程组 ② 有非零解.

注：齐次线性方程组 ② 一定有零解 $x_j=0(j=1,2,\cdots,n)$. 对于齐次线性方程组除零解外是否还有非零解，可以由(2) 判定.

四、矩阵的运算

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵. 记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或(a_{ij}).

2. 矩阵的线性运算

(1) 矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 均是 $m\times n$ 矩阵，若 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 满足 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(2) 矩阵的数乘

数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中每个元素相乘所得到的 $m\times n$ 矩阵称为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$.

矩阵的加法和矩阵的数乘两种运算统称为矩阵的线性运算. 且满足下列运算规律(其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 为同型矩阵，λ,μ 为数)：

①(交换律)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

②(分配律)$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B},(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

③(结合律)$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$；

④(数和矩阵相乘的结合律)$\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$；

⑤$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O};\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

3. 矩阵乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，则规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行各元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积的和，并且矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

矩阵乘法满足以下运算规律(假设所有运算均有意义，λ 是常数)：

(1)(结合律)$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2)(分配律)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

(3)(数与矩阵乘积的结合律)$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

注：矩阵乘法一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

4. 矩阵的转置

将矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的所有行与列互换所得到的矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$

的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{A}'$），即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置也是一种运算，它满足下列性质（假设所有运算均有意义）：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ （λ 是数）；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

5. 方阵的行列式

由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素按原来的位置所构成的行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，λ 是实数，k 为正整数，则

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^{n}|\boldsymbol{A}|$；

(3) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

(4) $|\boldsymbol{A}^{k}|=|\boldsymbol{A}|^{k}$.

五、逆矩阵

1. 逆矩阵的定义

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. 伴随矩阵的定义

设有 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，称

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，其中 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

3. n 阶方阵可逆的充要条件

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 且若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

4. 可逆矩阵的性质

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是互逆的；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 也可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$；

(5) 若同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

六、矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 矩阵的初等变换

下列三种变换称为矩阵的初等行变换.

(1) 对换变换:矩阵的两行互换(第 i 行与第 j 行互换,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(2) 倍乘变换:用非零数 k 乘以矩阵的某一行(k 乘第 i 行,记作 kr_i);

(3) 倍加变换:用数 k 乘以矩阵的某行元素后加到另一行对应元素上(k 乘第 j 行加到第 i 行上去,记作 $r_i + kr_j$).

将上述三条中的"行"换成"列"所成的变换,称为矩阵的初等列变换,矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

若非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的构成满足条件:

① 如果矩阵有零行(元素全为零的行),且零行排在所有非零行(元素不全为零的行)的下面;

② 非零行的排列次序为:第 i 行($i > 1$)的首非零元(左起第一个非零元素)所在列的序号大于上一行(第 $i-1$ 行)的首非零元所在列的序号,

则称 $\boldsymbol{A}$ 为行阶梯形的矩阵.

若行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又满足条件:

① 非零行的首非零元都是 1;

② 非零行的首非零元所在的列其余元素都为 0,

则称 $\boldsymbol{A}$ 为行最简形的矩阵.

若矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 经初等变换将 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{rr}$ ($r \leqslant \min\{m, n\}$) 位置的元素化为 1,其余元素都化为 0,则称所得矩阵为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准形,记作 $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{A}}$.

2. 初等矩阵

对单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 实施一次初等变换,所得到的矩阵称为初等矩阵.

对任何非零矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,总存在有限个(设为 l 个)m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_l$ 和有限个(设为 s 个)n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_s$,使得

$$P_1P_2\cdots P_lAQ_1Q_2\cdots Q_s = I_A.$$

对 A 和 I 做相同的初等行变换，只要将 A 变换成 I，也就将 I 变换成了 A^{-1}. 于是有

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I \mid A^{-1}).$$

同理，有

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ \hdashline A^{-1} \end{pmatrix}.$$

注：求矩阵的逆矩阵有两种方法：① 通过伴随矩阵求解；② 通过初等行变换或初等列变换求解.

七、向量的线性运算

设向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则定义向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的加法为：

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \overset{\triangle}{=\!=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

而数 λ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘法为：

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} \overset{\triangle}{=\!=} (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n).$$

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算. 它们满足以下运算规律（λ, μ 为数，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 为向量）：

(1)（交换律）$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$；

(2)（结合律）$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\mu\boldsymbol{\alpha}) = \mu(\lambda\boldsymbol{\alpha})$；

(3)（分配律）$\lambda(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta}$，$(\lambda + \mu)\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$.

八、向量组的线性相关性

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量空间 V 的一个向量组，若存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ 且不全为零，使 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,$

$\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关;否则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

由向量组的线性相关性可知

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

(2) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出且表示唯一.

(3) 设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 均为向量空间 V 中的两个向量组,若

①B 组可由 A 组线性表出,

②$s>r$,

那么 B 组向量组线性相关.

推论:设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 均为向量空间 V 中的两个向量组,B 组可由 A 组线性表出,且 B 组线性无关,则 $s\leqslant r$.

(4) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,则加上任意 $m-r$ 个同维向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 后,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 仍线性相关.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{\beta}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi},a_{(m+1)i})\in\mathbf{R}^{m+1}$,$i=1,2,\cdots,r$.若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 也线性无关.

九、向量组的极大无关组

1.向量组的极大无关组的定义

若存在同维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足

(1)$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关;

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意 $r+1$ 个向量(如果有 $r+1$ 个向量的话)都线性相关,

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大(或最大)无关组.而 r 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

2. 向量组的性质

向量组线性无关的充要条件是它所含向量的个数等于它的秩.

向量组和它的极大无关组等价.

等价的向量组有相同的秩.

3. 矩阵的行秩、列秩及矩阵的秩

(1) 矩阵的秩的有关定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,在 $\boldsymbol{A}$ 中取 k 行,k 列,位于这些行和列相交处的元素,按照原来的次序组成一个 k 阶行列式,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在一个 r 阶子式不为零,而所有高于 r 阶的子式(如果有的话) 全为零,则称 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记作 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=r$. 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时,规定 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=0$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\xlongequal{\triangle}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\xlongequal{\triangle}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行构成的行向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$,$\boldsymbol{\beta}_j$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列构成的列向量 $\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$,$i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$. 则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩;$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

(2) 向量组的秩与矩阵的秩的关系

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行(或列) 变换化为 $\boldsymbol{B}$,则

①$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行(或列) 向量组等价;

②$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应的列(或行)向量组的线性相关性相同.

矩阵经初等变换,它的行秩和列秩均不变.

矩阵的行秩 = 矩阵的列秩 = 矩阵的行阶梯形的非零行数 = 矩阵的列阶梯形的非零列数.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵.

十、线性方程组

1. 齐次线性方程组

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{③}$$

称为 n 元齐次线性方程组. 记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为方程组的系数矩阵,$\boldsymbol{x}$ 为方程组的未知数向量. 则方程组 ③ 可表示为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}. \tag{④}$$

2. 齐次线性方程组的解的结构

若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 为 ④ 的解,则 $\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$ 也是 ④ 的解.

若 $\boldsymbol{\xi}$ 为 ④ 的解,k 为任意实数,则 $k\boldsymbol{\xi}$ 也是 ④ 的解.

3. 齐次线性方程组的解

若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 满足：

(1)$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关；

(2)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的每一个解都能由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出，

则把 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 称为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

基础解系的线性组合称为 ④ 的通解，其通解可表示为

$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$　($k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数).

齐次线性方程组 ③ 只有零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=n$，有非零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=r<n$.

当 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=r<n$ 时，方程组的任一基础解系中含 $n-r$ 个解向量.

含 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

有非零解的充要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

4. 非齐次线性方程组

线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{⑤}$$

称为非齐次线性方程组($b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零). 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则方程组⑤可表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{⑥}$$

称 $\boldsymbol{B}=\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n \,\vdots\, \boldsymbol{b})$ 为方程组⑤的增广矩阵.

5. 非齐次线性方程组的解的结构

若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为⑥的两个解,则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

若 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,$\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解,则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

6. 非齐次线性方程组的解

当 $r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{B})$ 时,非齐次线性方程组⑤无解.

方程组⑤有解的充要条件为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$. 当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=n$ 时,非齐次线性方程组⑤有唯一解;当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r<n$ 时,方程组⑤有无穷多解.

若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\eta}$ 为⑥的一个解,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta} \quad (k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\text{ 为任意常数}).$$