第一部分 初等数学

一、初等代数

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），

⑴ 根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个相不同的实根；
当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相同实根；
当 $\Delta<0$ 时，方程有共轭复根。

⑵ 求根公式为 $$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

⑶ 韦达定理 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$； $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

2. 对数运算性质（$a>0$，$a\neq 1$）

⑴ 若 $a^y=x$，则 $y=\log_a x$；

⑵ $\log_a a=1$，$\log_a 1=0$，$\ln e=1$，$\ln 1=0$；

⑶ $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$；

⑷ $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$； ⑸ $\log_a x^b=b\log_a x$；

⑹ $a^{\log_a x}=x$，$e^{\ln x}=x$ ⑺ $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

3. 指数运算性质

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$， (2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (3) $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$；

(4) $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$； (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$； (6) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$；

(7) $a^0 = 1$； (8) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

4. 常用不等式及其运算性质

⑴若 $a > b$，则

① $a \pm c > b \pm c$， $c - a < c - b$；

② $ac > bc$（$c > 0$）， $ac < bc$（$c < 0$）；

③ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$（$c > 0$）， $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$（$c < 0$）；

④ $a^n > b^n$（$n > 0$，$a > b > 0$），$a^n < b^n$（$n < 0$，$a > b > 0$）；

⑤ $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$（$n$ 为正整数，$a > b > 0$）.

⑵绝对值不等式：设 a，b 为任意实数，则

① $|a| - |b| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$；

② $|a| \le b$（$b > 0$）等价于 $-b \le a \le b$，特别 $-|a| \le a \le |a|$；

③ $|a| \ge b$（$b > 0$）等价于 $a \ge b$ 或 $a \le -b$；

⑶某些重要不等式

①设 a，b 为任意实数，则 $a^2 + b^2 \ge 2ab$；（$a + b > 2\sqrt{ab}$）

②设 a_1，a_2，…，a_n 均为正数，n 为正整数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

5. 常用二项式展开及因式分解公式

(1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$；

(2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$；

(3) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

(4) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$；

(5) $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$；

(6) $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$；

(7) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$；

(8) $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

6. 牛顿二项式展开公式（n为正整数）

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots C_n^ka^{n-k}b^k + \cdots C_n^nb^n.$$

其中组合系数 $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$，　$C_n^0 = 1$，$C_n^n = 1$.

7.　常用数列公式

⑴等差数列：a_1，a_1+d，a_1+2d，…，$a_1+(n-1)d$.

首项为a_1，第n项为$a_n = a_1+(n-1)d$，公差为d，前n项的和为

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]$$

$$= na + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

⑵等比数列：a_1，a_1q，a_1q^2，…，a_1q^{n-1}.

首项为a_1，公比为q，前n项的和为

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

8. 一些常见数列的前n项和

(1)$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(2)$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

(3)$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$;

(4)$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

(5)$\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

9. 阶乘$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$.

二、三角函数

1. 基本关系

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$；　(2) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$；

(3) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$；　(4) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$；

(5) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$；　$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$；　$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$；　$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

2. 倍角公式

(1) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$；

(2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$；

(3) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

3. 半角公式

(1) $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$；　(2) $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$；

(3) $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$.

4. 和角公式

(1) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$；

(2) $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$；

(3) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$；

(4) $\cos(x - y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$；

(5) $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

5. 和差化积公式

(1) $\sin x + \sin y = 2\sin \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$；

(2) $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$；

(3) $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$；

(4) $\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

6. 积化和差公式

(1) $\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$；

(2) $\cos x\sin y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$；

(3) $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$；

(4) $\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$.

7. 特殊三角函数值

角 / 函数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

三、初等几何

下面初等几何公式中：字母 r 表示圆半径，h 表示高，l 表示斜高，θ 表

示角度。

1. 三角形面积$=\frac{1}{2}ah$（a为底边长）

$$\frac{1}{2}ah\sin\theta$$

2. 梯形面积$=\frac{1}{2}(a+b)h$（a，b为梯形两底边长）

3. 圆周长$=2\pi r$；圆面积$=\pi r^2$

4. 圆扇形周长$=r\theta$；圆扇形面积$=\frac{1}{2}r^2\theta$

5. 正圆柱体体积$=\pi r^2 h$；正圆柱体侧面积$=2\pi rh$

6. 正圆锥体体积$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$；正圆锥体侧面积$=\pi rl$

7. 球体体积$=\frac{4}{3}\pi r^3$；球体表面积$=4\pi r^2$

四、平面解析几何

1. 基本公式

⑴给定点$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，则M_1与M_2间的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

⑵设有两直线，其斜率分别为k_1，k_2，则

两直线平行的充要条件为$k_1=k_2$

两直线垂直的充要条件为$k_1 \cdot k_2 = -1$

2.平面直线的各种方程

⑴点斜式：直线过点(x_0, y_0)，其斜率为k，则直线方程为

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

⑵斜截式：直线斜率为k，在y轴上截距为b，则直线方程为

$$y = kx + b$$

⑶两点式：直线过点$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$，则直线方程为

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

⑷截距式：设直线在x轴与y轴上的截距分别为a，b，则直线方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

3.曲线方程

⑴圆周方程：圆心在点(x_0, y_0)，半径为r的圆周方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

⑵抛物线方程：

顶点在圆点，焦点在$(\frac{p}{2}, 0)$的方程为 $y^2 = 2px$

顶点在圆点，焦点在$(0, \frac{p}{2})$的方程为 $x^2 = 2py$

顶点在(a, b)，对称轴为$y = b$的方程为 $(y - b)^2 = 2p(x - a)$

顶点在(a,b)，对称轴为$x=a$的方程为 $(x-a)^2=2p(y-b)$

⑶椭圆方程：中心在原点，a为长半轴，b为短半轴，焦点在x轴上的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$

⑷双曲线方程：中心在原点，a为实半轴，b为虚半轴，焦点在x轴上的双曲线方程为 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$

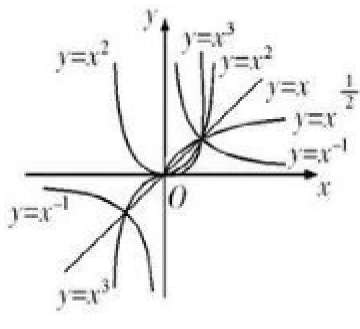
⑸等边双曲线方程：中心在原点，以坐标轴为渐近线的双曲线方程为 $xy=a$（a为常数）

第二部分　专接本数学知识考点大全

一、基本初等函数

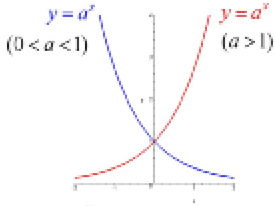
1、常值函数：$y=c(c为常数)$，其定义域（$-\infty,+\infty$）

2、幂函数：$y=x^\alpha$（α为常数），性质随α改变，x在$(0,+\infty)$总有定义且$\alpha>0$时，函数在定义域内单调增加；当$\alpha<0$时，$y=x^\alpha$在$(0,+\infty)$单调减少。图像必过点（1,1），

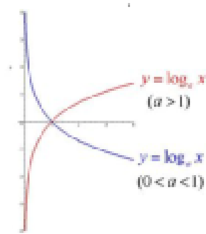


3、指数函数：$y=a^x\ (a>0,a\neq1)$，

定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$(0,+\infty)$。当$a>1$时，单调增加，当$0<a<1$时，单调减少，　常用函数$y=e^x$

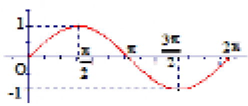
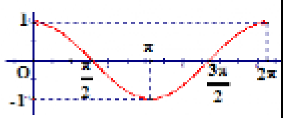
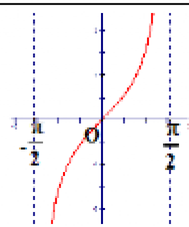


4、对数函数：$y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$，是指数函数的反函数，　定义域$(0,+\infty)$，值域$(-\infty,+\infty)$，当$a>1$时，单调增加，当$0<a<1$时，单调减少。



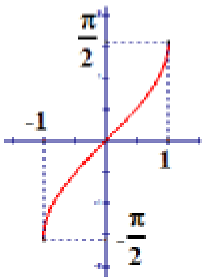
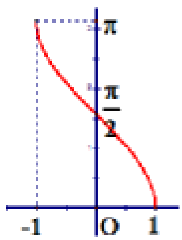
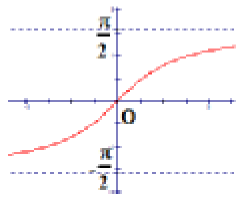
5、三角函数：

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

$k\in Z$	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
一个周期的图像			
定义域	R	R	$\left\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
周期	2π	2π	π

6、反三角函数

$y=arc\sin x, y=arc\cos x, y=arc\tan x, y=arc\cot x$

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
单调性	在$[-1,1]$上单调递增 无减区间	在$[-1,1]$上单调递减 无增区间	在 R 上单调递增 无减区间
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
图象			

二、函数极限

1、 极限收敛及其性质：$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$ 或 $a_n \to A(n\to\infty)$

性质有：唯一性、有界性、奇偶子列均收敛、保序性

2、函数极限两边夹定理：如果函数 $f(x),g(x),h(x)$ 满足：

(1) $f(x)\le g(x)\le h(x)$（在 x_0 的某空心邻域内成立即可）；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$

3、重要极限 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

4、无穷大（小）量

当$x\to x_0$时，$f(x)$与$g(x)$都是无穷小量，且$f(x)\neq 0$。

则：（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$时，称$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=c\neq 0$

或$f(x)$是$g(x)$的低阶无穷小。记$g(x)=o(f(x))$（$x\to x_0$）

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=c\neq 0$时，称$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小量，

当c=1时，称两者为等价无穷小。 记：$g(x)\sim f(x)$ （$x\to x_0$）

5、等价无穷小替换公式：$x\to 0$时

$\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $\arcsin x \sim x$ $\arctan x \sim x$

$\ln(1+x)\sim x$ $e^x-1\sim x$ $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$

6、连续：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，连续必须左右极限均存在，$x_0$为一个间断点间断点的分类：

第一类：左右极限均存在，又分为：

（1） 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)$，即$\lim\limits_{x\to x}f(x)$存在，但

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$或$f(x_0)$没意义；

（2） 跳跃间断点$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)$

第二类间断点：不属于第一类间断点的都是第二类。

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x-} f(x)=\infty$ 称为无穷型间断点。

7、零点定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$

三、导数

1、定义; $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f_-'(x_0), f_+'(x_0)$ 都存在且相等

2、基本初等函数求导公式：

（1）$(C)'=0$（C 是常数）　　（2）$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

（3）$(\sin x)'=\cos x$　　（4）$(\cos x)'=-\sin x$

（5）$(\tan x)'=\sec^2 x$　　（6）$(\cot x)'=-\csc^2 x$

（7）$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　（8）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

（9）$(a^x)'=a^x\ln a$　　（10）$(e^x)'=e^x$

（11）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　（12）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　（16）$(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

3、切线与法线：

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)\quad (y_0=f(x_0))$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad (f'(x_0)\neq 0)$$

4、中值定理

⑴、罗尔定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 可导，且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

⑵、拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，
在开区间 (a,b) 可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，
使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$（该式又称拉格朗日中值公式）

5、洛必达法则对于未定型函数极值 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}=A$$

6、函数凹凸性及拐点

（1）凹凸性判定：$[a,b]$ 内 $f''(x)$＞0，函数图形凹；
反之＜0 为凸函数。

（2）拐点判定：① 求 $f''(x)$；

② $f''(x)=0$，求根或 $f''(x)$ 不存在的点 x_0；

在 x_0 两侧异号时，点 $(x_0,f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 的拐点。

（3）渐近线

①若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则直线 $y=A$ 是曲线 $f(x)$ 的水平渐近线；

② $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，则直线 $x=a$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线 。

7、函数极值问题

（1）费马定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值则 $f'(x)=0$，导数值为 0 点即驻点。（注可导函数极值点必是驻点，反之不一定成立）

（2）两个充分条件：

第一条件：x_0 两端导数异号，左增右减为极大值点，反之，极小值点；

第二条件：函数在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x)=0$，$f''(x)\neq 0$，则当 $f''(x)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；当 $f''(x)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。（$f''(x_0)=0$ 时条件失效）

（3）应用题中极值题解题步骤：

①设变量②函数表达式③化简④值域开区间⑤ 求导⑥找驻点⑦求最值

8、导数的经济应用：

（1）需求的价格弹性：称 $\eta=-\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{p}{Q}$ 为该商品的需求价格弹性，简称为需求弹性．需求弹性的经济含义：价格每上涨 1% 时所引起的需求量减少的百分数．

（2）边际函数：经济函数对其自变量的导数，称为该经济函数的边际函数（边际值）．

（3）几个重要经济函数：

总成本函效：$C=C(Q)=C_1+C_2(Q)$

C_1 为固定成本，C_2 为可变成本

平均成本函数 $\overline{C}=\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2(Q)}{Q}$

边际成本函数 $C'=C'(Q)$

商品价格：$P=P(Q)$

总收益函数：$R = R(Q) = QP(Q)$

平均收益函数 $\overline{R} = \overline{R}(x) = \frac{R(Q)}{Q} = P(Q)$

边际收益函效 $R' = R'(x) = QP'(Q) + P(Q)$

利润函数：$L = R - C$

当边际收益与边际成本相等时，利润最大，即 $R' = C'$.

四、积分

1、不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$

一、常用公式

（1） $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c\ (\mu \neq -1)$ ；（2） $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ ；

（3） $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ ；（4） $\int e^x dx = e^x + c$

（5） $\int \sin x dx = -\cos x + c$ ；（6） $\int \cos x dx = \sin x + c$ ；

（7） $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$ ；

（8） $\int \frac{1}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$ ；

（9） $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$ ；

（10） $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$ ；

（11） $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$ ；

（12） $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$；；

(13) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$；　（14） $\int \cot x = \ln|\sin x| + c$；

（15） $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$；

（16） $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

二、换元方法

（1）凑微分 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du\Big|_{u=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + c$

（2） 换元法： 设函数 $x = \varphi(t)$ 单调、可导，并且 $\varphi'(t) \neq 0$；又设

$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 具有原函数 $G(t)$，则有

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C = G[\varphi^{-1}(x)] + C.$$

（3）三角换元法：

$f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$　令 $x = a\sin t$　$\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$　令 $x = a\tan t$　$\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$　令 $x = a\sec t$　$\left(0 \le t < \frac{\pi}{2} \text{或} \frac{\pi}{2} < t \le \pi\right)$

三、分部积分法： $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ 或 $\int udv = uv - \int vdu$

$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx$	$u=P_n(x)$， $dv=\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx$	降低 n 次多项式 $P_n(x)$ 的次数
$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \end{Bmatrix}dx$	$u=\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \end{Bmatrix}$， $dv=P_n(x)dx$	“消”函数符号 $\ln$， $\arcsin x$ 等
$\int e^x\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx$	$\begin{cases} u=\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \\ dv=e^x dx \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx \end{cases}$	“回头积分”

2.、定积分　注意：仅与被积函数法则和积分区间有关；

$$\int_b^a f(x)dx=0\text{；}\quad \int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

定积分中值定理：$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\qquad (a\le\xi\le b)$

一、性质：

（1） $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

（2） $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$（$k$ 是常数）.

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$　（c 是常数）.

(4) 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$．则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dx=b-a$．

(5) 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$．则$\int_a^b f(x)dx\geq 0$（$a<b$）．

推论 1　如果在区间$[a,b]$上，$f(x)\leq g(x)$．

则$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$（$a<b$）．

推沦 2　$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$　（$a<b$）．

(6)设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，则

$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$（$a<b$）．

(7) 奇函数、偶函数的定积分计算：

若$f(x)$在$[-a,a]$上连续且为偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$．

若$f(x)$在$[-a,a]$上连续且为奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx=0$．

二、积分上限的函数：　$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\quad(a\leq x\leq b)$

积分上限函数的导数公式：

（1）$\frac{d\left[\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt\right]}{dx}=f[\varphi(x)]\bullet\varphi'(x)$

（2）$\frac{d\left[\int_{\varphi(x)}^b f(t)dt\right]}{dx}=-f[\varphi(x)]\bullet\varphi'(x)$

(3) $\frac{d\left[\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)}f(t)dt\right]}{dx}=f[\phi(x)]\bullet\phi'(x)-f[\varphi(x)]\bullet\varphi'(x)$

3、广义积分 $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$

（1） $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$

（2） $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$

（3） $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 f(x)dx + \lim_{t \to +\infty} \int_0^t f(x)dx,$$

上述极限存在，则称反常积分收敛，反之，称其发散。

（数一）**4、向量（既有大小又有方向）**

1、线性运算

1. 1 加法： 交换律、结合律　　乘法： 结合律、分配律

数乘 $a = |a|a^0$ ，则单位向量 $a^0 = \dfrac{a}{|a|}$

1.2 空间向量

两点间距离公式 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

1.3 数量积

$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$ 满足交换律 、结合律、分配律

坐标式 $a = (a_x, a_y, a_z)$， $b = (b_x, b_y, b_z)$

则 $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$a \perp b \Leftrightarrow a.b = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

向量积：令$c = a \times b$，

则①$|c| = |a \times b| = |a||b| \sin(a \wedge b)$；

②c 与 a，b 都垂直；③a，b，c 符合右手定则

5、平面方程

（1）法向量是垂直于平面π的非零向量$n = \{A, B, C\}$

点法式方程 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

（2）平面关系：相交、平行、重合

平面$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$；

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

两平面夹角用θ表示，则

$$\cos\theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right),$$

点$M(x_0, y_0, z_0)$到平面$Ax + By + Cz + D = 0$的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

6、空间直线方程

（点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量$s=\{l,m,n\}$）

①直线标准式 （对称式、点向式）

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$ （$l=0$则直线垂直于x轴）

②参数方程

令$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$，

则$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt,(-\infty<t<\infty) \\ z=z_0+nt \end{cases}$

③直线一般（交面式）方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}, s=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}\neq 0$$

④线面夹角L与它在平面上投影直线间的夹角$\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

θ为L与法向量间夹角，

$$\sin\varphi=\sin\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|=\cos\theta=\frac{|s\cdot n|}{|s||n|}=\frac{|lA+mB+nC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\begin{cases} L\perp\pi\Leftrightarrow\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C} \\ L//\pi\Leftrightarrow mA+nB+pC=0 \end{cases}$$

7、曲面方程

椭球面 ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ （$a=b$时旋转椭球面）

抛物面 $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ （p,q 同号),

用 $z=z_1$ （$z_1>0$ ）截得截痕为双曲抛物面或马鞍面

锥面方程：$x^2+y^2=k^2z^2$

五、多元微分

1、偏导：在某一点处极限值 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

即为在该点处对 x 的偏导数。

二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续,那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

2、全微分 $dz=A\Delta x+B\Delta y$ （即线性主部）

①可微充分条件： 在点 (x_0,y_0) 处可微；

②必要条件：可微 $\Longrightarrow$ 在该点偏导存在，

且 $\frac{\partial z}{\partial x}=A(x,y)$， $\frac{\partial z}{\partial y}=B(x,y)$

从而 $z=f(x,y)$ 在该点全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$；

③充要： $z=f(x,y)$ 的偏导 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$,在在该点连续。

3、复合求导：

(1)如果函数$u=\varphi(t), v=\psi(t)$都在在点t处可导，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数$z=f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]$在$t$点可导，且有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

如果函数$u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$都在点$(x,y)$具有对$x$及对$y$的偏导数，函数$z=f(u,v)$在对应点$(u,v)$具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数都存在，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4、隐函数求导：

一元隐函数：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$

二元隐函数：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$.

5、多元极值：

（1）无条件极值

存在的必要条件：$z=f\left(x,y\right)$偏导存在，且在$\left(x_0,y_0\right)$处有极值，则该点偏导必为零即$f_x'\left(x_0,y_0\right)=0$，$f_y'\left(x_0,y_0\right)=0$

极值存在充分条件：$z=f\left(x,y\right)$二阶偏导连续，一阶导为零，令

$A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$.

1)当$B^2-AC<0$时，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取极值，且当$A>0$时，$f(x_0,y_0)$为极小值，当$A<0$（或$C<0$）时，$f(x_0,y_0)$取极大值；

2)当$B^2-AC>0$时，$f(x_0,y_0)$不是$f(x,y)$的极值；

3)当$B^2-AC=0$时，不能断定$f(x,y)$在$f(x_0,y_0)$处是否取极值.

（2）条件极值 ：拉格朗日乘数法（自变量间存在约束关系时）

求$z=f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值步骤：

①构造函数：$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$（$\lambda$为参数，称拉格朗日常数）

1)写方程组：$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \\ F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 \\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$

2)解得驻点(x_0,y_0)

六、二重积分（体积）

1、性质：线性、积分区域可加性、保号性、保序性、

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma \quad mS_D \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$$

2、X型区域上二重积分“先y后x”的二次积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy]dx \square \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy$$

Y 型“先 x 后 y ”

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d [\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx]dy \square \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

3、极坐标计算

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\cos\theta)rdrd\theta$$

先 r 后 θ ：

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\theta d\theta \int_{r_2(\theta)}^{r_1(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

先 θ 后 γ

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\theta d\theta \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rd\theta$$

4 曲线积分计算公式：

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

5、格林公式：

闭区域由光滑或分段光滑的简单闭曲线 L（正向）围成，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上一阶偏导则：

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

6、积分曲线与路径无关：$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$

等价命题：二元函数在 G 一阶连续偏导：

① $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ②光滑闭曲线 L，$\oint_L Pdx + Qdy = 0$

③曲线积分 $\oint_L Pdx + Qdy$ 与路径无关

七、级数

1、常数项无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$

部分和数列$\{S_n\}$，若$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，

则称级数收敛，S为级数的和，若极限不存在则发散.

2、等比级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n == a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & 当|q|<1 \\ 发散 & 当|q|\geq 1 \end{cases}$$

3、性质：

性质 1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于和 s, 则它的各项同乘以一个常数 k 所得的级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$也收敛, 且其和为 ks.

性质 2 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于和s、σ, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛, 且其和为 $s\pm\sigma$.

性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的收敛性.

性质 4 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛, 且其和不变.

级数收敛的必要条件:

性质 5 如果$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则它的一般项u_n趋于零, 即.$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

4、正项级数收敛的充要条件是：部分和数列有界.

5、判定方法：

（1）比较审敛法：

两正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n \le v_n$，

当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也发散。

极限形式：若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ \left(0<l<+\infty\right)$ 两级数同时收敛或发散

（2）比值审敛法（达朗贝尔）

正项级数且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\ \left(0<\rho\le+\infty\right)$，

则当①$\rho<1$时收敛；②$\rho\ge1$时发散

6、交错级数：$u_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

① 莱布尼茨定理：交错级数满足

（1）$u_n \ge u_{n+1}$；　　$\left(n=1,2,3\cdots\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数收敛，且其和$s\le u_1$，

②绝对收敛与条件收敛：

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛， 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是条件收敛。

7、幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

取 $x_0 = 0$，得 x 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

（2）收敛半径判定：设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，

则①当 $\rho \neq 0, +\infty$ 时，$R = \frac{1}{\rho}$ ；

② 当 $\rho = 0$ 时，$R = +\infty$；③当 $\rho = +\infty$ 时，$R = 0$

（3）计算：和函数逐项求导 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

（4）逐项求积分：$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

（5）泰勒展开：

① $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$，$(x \in R)$

② $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$，$(|x| < 1)$

③ $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，

$$= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad (-1 < x \le 1)$$

八、微分方程

1、通解：若 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots C_n)$ 为某个 n 阶常微分方程的解，且含有 n 个相互独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots C_n$，则称这个解为方程的通解。（注：通解未必是全部解）

特解：确定了解中任意常数，或满足一定的条件。

隐式解：$\varphi(x, y, c) = 0$

2、一阶微分方程

（1）变量可分离方程：$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$ （$f(x), \varphi(y)$ 为连续函数）

分离变量 $\frac{dy}{\varphi y} = f(x)dx$

（2）一阶线性微分方程：$y' + P(x)y = Q(x)$ （非齐次）

$y' + P(x)y = 0$ （齐次）

齐次通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ （C 为任意常数）

非齐次通解 $y = e^{-\int P(x)dx}\left[Q(x)e^{P(x)dx}dx + C\right]$

（3）二阶线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$

① 齐次两线性无关解的组合是齐次的通解；

② 非齐次的特解与齐次的通解的非齐次的通解：$y = Y + y^*$

3、二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$

对应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

特征根	方程 $y''+py'+qy=0$ 的解
r_1,r_2 为相异实根	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
r_1,r_2 二重实根	$y=(C_1+C_2)e^{rx}$
$r=\alpha\pm i\beta(\beta\neq 0)$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$

求解方法：已知齐次相应解，再求一个特解，利用待定系数法，

求特解过程如下：

1．若 $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$，其中 $P_m(x)$ 为 m 次多项式.

则特解有形式 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}\quad \alpha\in R$.

其中 k 为 α 为特征根时的重数，即若 α 不是特征根（零重根），取 $k=0;\alpha$ 为特征单根，取 $k=1$； α 为特征重根（二重根），取 $k=2$． $Q_m(x)$ 为一个 m 次多项式.

2．若 $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x),\alpha,A,B\in R$，则方程(8．8)有特解形式 $y^*=x^ke^{\alpha x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x)$.

其中 k 为 $\alpha+i\beta$ 是特征根的重数，即若 $\alpha+i\beta$ 不是特征根，取 $k=0$；若 $\alpha+i\beta$ 是特征根，取 $k=1$.

九、行列式 （数表，正负各半）

1、概念：

1.1 主对角线 ：左上角到右下角的连线；次对角线：右上角到左下角的连线

1.2 余子式：行列式中划去元素 a_{ij} 所在的那一行和列所称的子式，记为

M_{ij}，而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式

2、性质：

（1）行列式与其转置相等；

（2）互换行列式两行（列），行列式变号

（3）行列式两行（列）相的值为 0；

（4）用一个数乘以行列式每一行（列）=用该数乘以行列式每一行（列）中所有元素；

（5）行列式两行（列）对应成比例，行列式值为 0；

（6）行列式某一行（列）中各元素乘以同一数，然后加到令一行（列）对应元素上去，行列式值不变。

3、克莱姆法则：D 为系数行列式值

若非其次线性方程的系数行列式 $D\neq 0$，则方程有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$ 。

其中 $D_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列元素依次用方程右边常数

$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后得到的 n 阶行列式。

齐次线性方程组解的定理：$\begin{cases}D\neq 0\Leftrightarrow \text{仅零解}\\ D=0\Leftrightarrow \text{非零解}\end{cases}$.

十、矩阵

1、对角矩阵：$A=\begin{pmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$

2、数量矩阵：$A=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$ 3、单位矩阵：$I_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

4、三角形矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

5、矩阵运算：①加法：两矩阵均为$m\times n$阶，对应位置相加减；

②数与矩阵相乘：$kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$，

$$2\times\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\times 5 & 2\times 0 & 2\times 1 \\ 2\times 1 & 2\times 3 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 2 & 2\times 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

③两矩阵相乘：设矩阵$A=(a_{ik})_{m\times l}$的列数与矩阵$B=(b_{kj})_{l\times n}$的行数相同，则由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\ldots m;j=1,2,\ldots,n)$$

构成的m行n列矩阵$C=(c_{ij})_{m\times n}=(\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj})=A\times B$.

$AB\neq BA$，若$AB=BA$，则称A与B可交换.

④可交换矩阵：满足$AB=BA$；注意: $AB=0$不能推出：$A=0$或$B=0$

⑤方阵的幂：$A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$ $(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1k_2}$

⑥矩阵转置：

$$A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots & am_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

⑦方阵行列式：由方阵中元素按原来的位置所构成的行列式，

记为$|A|$

性质：$|A^T| = |A|$，$|\lambda A_{n\times n}| = \lambda^n |A_{n\times n}|$，$|AB| = |A||B|$

6、逆矩阵：$AB = BA = I$ 称矩阵 A 可逆，B 为 A 的逆矩阵

伴随矩阵：$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$；

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

方阵 A 可逆充要条件：$|A| \neq 0$，若 A 可逆则 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$

逆矩阵性质及公式：

性质：(1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ （2）$(A^{-1})^{-1} = A$ （3）$(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$

(4) $(kA)^T = kA^T$ (5) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

公式：(1) $AA^* = |A|E$ (2) $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$ (3) $|A^*| = |A|^{n-1}$

(4) $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$ (5) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

7、矩阵初等行变换：三种形式：

①对换变换：互换两行

②倍数变换：用非零数乘以某一行；

③倍加变换：数 k 乘以某行元素后加到另一行对应元素上去

等价矩阵：A 经初等变换成 B，则称等价 $A \sim B$；

具有反身性、对称性、传递性

行最简形：非零行的首非零元素是 1；

首非零元素所在列其余元素都为零

标准形：主对角元素 1，1 的个数小于等于列数其余 0

两矩阵等价充要条件：具有相同标准形

8、矩阵的秩：矩阵 A 中存在一个 r 阶子式不为零，而高于 r 的子式全为零则称 r 为矩阵 A 的秩，记做 $R(A)=r$，当 $A=0$ 时，$R(A)=0$.

若 $r=n$，则称 A 为满秩矩阵，否则称为不满秩；

满秩充要条件 $|A| \neq 0$

十一、向量组

1、线性表示定义：对于给定向量 β，$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$，若存在一组数 $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$，使 $\beta = \mathrm{k}_1 a_1 + \mathrm{k}_2 a_2 + \mathrm{k}_3 a_3 + \ldots\ldots \mathrm{k}_n a_n$ 成立．则称 β 是 $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ 的线形组

合，或称 β 可为 $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ 的线性表示． 线性表示的充分必要条件：以 $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ 为列向量的矩阵与以 $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$，$\beta$ 为列向量的矩阵有相同的

秩.

2、线性相关定义：向量组$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$，若存在一组不全为 0 的数$k_1,k_2,\ldots,k_n$时，使得$\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\ldots\ldots+\mathrm{k}_n\alpha_n=0$成立，则称$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$线性相关.

线性无关定义：向量组$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$，当且仅当$k_1=k_2=\ldots=k_n=0$时，使得$\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\ldots\ldots+\mathrm{k}_n\alpha_n=0$成立，则称$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$线性无关.

（1）n个m维向量线性相关的充要条件是：$R(A)<n$.

（2）n个n维向量线性相关的充要条件是：$|A|=0$.

（3）当向量组中所含向量个数大于向量维数时，此向量组相关.

（4）如果向量组中有一部分向量（部分组）线性相关，则整个向量组相关.

（5）含有 0 向量的向量组线性相关.

（6）向量组$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_s\ (s\geq 2)$线性相关的充要条件是：其中至少有一个向量是其余$s-1$个向量的线性组合.

（7）如果向量组$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_s$，$\beta$线性相关，而$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_s$线性无关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ldots\ldots\alpha_s$线性表示且表示法唯一.

3、极大无关组定义：如果n维向量组$\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_s$中的一个线性无关的部分组$\alpha_{j1},\alpha_{j2},\ldots,\alpha_{jr}\ (r\leq s)$，$r$已达到最大可能，即如果$r$个向量以外向量组中还

有向量，那么任意$r+1$个向量构成的部分组均线性相关，则$\alpha_{j1},\alpha_{j2},\dots,\alpha_{jr}$称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots\alpha_s$的一个极大线性无关部分组，简称极大无关组． 向量组的极大无关组可能
不只一个，但由定义可知，其向量个数是相同的．

矩阵A的秩=行向量组的秩=列向量组的秩．

十二、方程组

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix},\quad a_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j=0,1,\cdots,n$$

一．齐次线性方程组$Ax=0$

$r(A)=n$时$\Leftrightarrow$仅有零解；$r(A)<n$时$\Leftrightarrow$有非零解．

1．解的性质：

① 如果V_1,V_2是齐次线性方程组的两个解，则V_1+V_2也是它的解； ② 如果V是齐次线性方程组的解，则cV也是它的解（c为常数）；③如果$V_1,V_2,\dots,V_s$都是齐次线性方程组的解，则其线性组合：

$c_1V_1+c_2V_2+\dots+c_sV_s$也是它的解，其中$c_1,c_2,\dots,c_s$都是任意常数．

2．基础解系：齐次线性方程组的解向量组的一个极大无关组（$V_1,V_2,\dots,V_s$）．

二、非齐次线性方程组$Ax=b$

$r(A)=r(A|b)=n$ 时 $\Leftrightarrow$ 有且仅有唯一解；

$r(A)=r(A|b)<n$ 时 $\Leftrightarrow$ 有无穷解；$r(A)\neq r(A|b)$ 时 $\Leftrightarrow$ 无解.

1．导出组：令 $b=0$,得到的齐次线性方程组 $Ax=0$， 称为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的导出组.

2．非齐次线性方程组的解与它的导出组的解之间有下列性质：

（1）如果 η 是非齐次线性方程组的一个解，ξ 是其导出组的一个解，则 $\eta+\xi$ 也是方程组的一个解.

（2）如果 η_1、η_2 是非齐次线性方程组的两个解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是其导出组的解.

（3）如果 η 是非齐次线性方程组的一个解，ξ 是其导出组的全部解，则 $x=\eta+\xi$ 是非齐次线性方程组的全部解.